الفصل الأول: الانحدار البسيط

سنحاول من خلال هذا الفصل التطرق لمفهوم الانحدار البسيط بكيفية جد مبسطة ،وهذا ليس تقصيرا منا أو سهوا بل بغية ايصال فقط بعض المفاهيم الأولية لكي تساعد الطلبة على تتبع الفصل القادم.

تساعد طريقة الانحدار البسيط على نمذجة[1] العلاقة بين متغيرين كميين مستمرين. شكل الانحدار البسيط

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon_t \text{ ....(1)}$$

Y: يمثل المتغير المشروح أو الذي تم تفسيره (المتغير التابع)،
X: يمثل المتغير المفسر او الشارح (المتغير المستقل)
β_0, β_1 : تمثلان معالم النموذج، وهما القيمتين المستهدفتين والتي يجب تقديرهما
ε_t :متغير عشوائي يسمى بحد الخطأ ليس له قيمة (يعبر عن خطأ صياغة النموذج) ،ظهوره في المعادلات يؤدي إلى تصنيف هذه النماذج ضمن النماذج العشوائية.

تعليق:

- يسمى انحدار بسيط في حالة وجود متغير مفسر واحد فقط والذي يمثل X في هذه الحالة، في المقابل هناك انحدار متعدد والذي يحتوي على أكثر من متغير مفسر:
$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots \ldots \beta_k X_k + \varepsilon_t \ldots\ldots\ldots(2)$$
- يسمى خطي لأن شكل العلاقة بين Y و X في النموذج هي شكل الدالة f :$Y=f(X)$، بما أنه يمكن للدوال الرياضية أن تأخذ عدة أشكال (تآلفية، جذرية، أسية، لوغاريتمية.....) فسنتعامل فقط مع الشكل الخطي وكما يظهر في (1).

مثال: هناك علاقة بين الانفاق الاستهلاكي والدخل ،شيء معروف من طرف الخاص والعام، لكن طلبة الاقتصاد يعلمون أن هذه العلاقة تم صياغتها وتفسيرها بشكل دقيق وكامل من طرق أحد أقطاب علم الاقتصاد والمتمثل في" كينز":

$$Y_d = \beta_0 + \beta_1 X_R + \varepsilon_t \text{ ....(3)}$$

Y_d: يمثل الانفاق الاستهلاكي (كل ما ينفق لاقتناء حاجيات الأفراد)،
X_R : يمثل الدخل (المتغير المستقل)

يمكن اضافة متغير مفسر أو أكثر إلى (2) وليكن حجم العائلة أي عدد أفراد العائلة M_d فيصبح لدينا نموذج متعدد:

$$Y_d = \beta_0 + \beta_1 X_R + \beta_2 M_R + \varepsilon_t \text{ ....(4)}$$

---

[1] النمذجة هي تمثيل رياضي لسلوك اجتماعي اقتصادي في شكل معادلات رياضية.

العلاقة (3) خطية في X_R أما العلاقة (4) فهي علاقة خطية في X_R و M_R. في الحالات العملية شكل النموذج يكون ضمن الاشياء المستهدفة والذي سيساعد في تقدير معالم النموذج لنصل إلى الشكل الرياضي للنموذج[2].

1-تقدير معالم النموذج:

النماذج (1)، (2)، (3) و(4) كلها نماذج خطية وعشوائية ،نلجأ في هذه الحالة وبتوفر شرطي الخطية والعشوائية لاستخدام طريقة المربعات الصغرى لتقدير معالم النموذج β_0, β_1

1-1-كيفية عمل طريقة المربعات الصغرى:

1-1-1-جمع المعطيات:

لا يمكن حساب معالم النموذج β_0, β_1 بل نقوم بحساب مقدراتها من خلال معطيات جزئية والتي تسمى العينة، نسحب عينة عشوائية[3] من مجتمع الدراسة على سبيل المثال في النموذج (1) أذا اخترنا عينة مكونة من 30 مشاهدة فيكون لدينا 30 زوج يمثل الانفاق الاستهلاكي والدخل، فمثلا الفرد A ينفق شهريا 42000DA ودخله يساوي 50000DA فتكون المشاهدة الخاصة بهذا الفرد هي: (50000DA, 42000DA).

يمكن تجميع معطيات العينة في جدول كما هو مبين أدناه:

Y_d	X_d
50000	42000
60000	42000
55000	40000
75000	40000
. .	. .
60000	47000

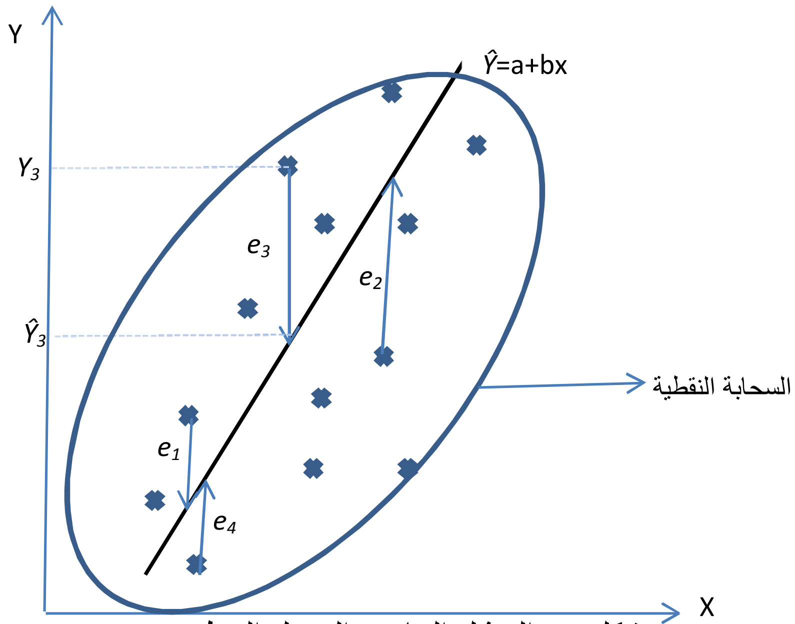
جدول رقم (1):جدول مختصرة المعطيات عينة مكونة من n مشاهدة

---

[2] يمكن التعرف على النماذج الخطية بالنظر إلى النموذج النظري فنلاحظ في (2) و(3) أنه لا يوجد جذر أو أس أو قسمة أو عملية جداء بالنسبة للمتغيرات بل هناك فقط مجموع جبري (جمع أو طرح المتغيرات).

[3] هناك نظريات خاصة بالعينة والمعاينة ونظرية التقدير.

1-1-2- **تمثيل المعطيات بيانيا:**



شكل (1):التمثيل البياني "التعديل الخطي"

نلاحظ أن النقاط ليست على استقامة واحدة وهذا منطقي لأن العلاقات الاجتماعية الاقتصادية ليست علاقات تامة (لا تكون النقاط على استقامة واحدة) بل علاقات عشوائية، وبالتالي نحصل على سحابة نقطية لها شكل خطى كما هو مبين في الشكل (1).

تم اختيار فقط أربعة نقاط للبواقي لتوضيح العملية ولنذكر أن المشكلة تكمن في كيفية اجاد قيمتي a وb.

1-1-3- **التقدير:**

أحسن خط مستقيم Y هو الذي يشمل أكبر قدر من النقاط ويحقق أدني قيم للبواقي e_i سنعتمد على معيار تصغير مجموع مربعات البواقي:

$$Min\sum e_i^2 = Min\sum\left(Y-\hat{Y}\right)^2 = Min\sum(Y-a-bX)^2$$

$$\frac{\partial\sum e_i^2}{\partial b} = \frac{\partial\sum(Y-a-bX)^2}{\partial b} = -2\sum(Y-a-bX)X = 0 \ldots\ldots\ldots(5)$$

$$\frac{\partial\sum e_i^2}{\partial a} = \frac{\partial\sum(Y-a-bX)^2}{\partial a} = -2\sum(Y-a-bX) = 0 \ldots\ldots.(6)$$

بحل (5) و(6) نحصل :

$$b = \frac{\sum Y_iX_i - n\bar{Y}\bar{X}}{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2} \ldots\ldots\ldots(7) \qquad ; a = \bar{Y} - b\bar{X} \ldots\ldots\ldots(8)$$

هناك علاقة أخرى لحساب قيمة b لا تستخدم كثيرا وهي:

$$b = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(X_i - \bar{X})^2} \qquad ; a = \bar{Y} - b\bar{X}$$

1-1-معامل الارتباط البسيط :

يعتبر من أهم المؤشرات المستخدمة في الانحدار البسيط، يستخدم لمعرفة نوعية العلاقة بين Y و X إن كانت علاقة طردية أو علاقة عكسية وشدة العلاقة بينهما:

$$-1 \leq r_{y,x} \leq 1$$

$$r_{y,x} = \frac{Cov(Y,X)}{\sigma_Y \sigma_X} \ldots\ldots\ldots(9)$$

$Cov(Y,X)$: يمثل التباين المشترك بين Y وX و σ_Y، σ_X يمثلان على التوالي الانحراف المعياري لـY وX.

$$Cov(Y,X) = \frac{1}{n}\sum Y_i X_i - n\bar{Y}\bar{X}; \quad \sigma_X = \left(\frac{1}{n}\sum X^2\right) - \bar{X}^2; \quad \sigma_Y = \left(\frac{1}{n}\sum Y^2\right) - Y^2$$

يمكن بعد تحويل المعادلة (9) الحصول على العلاقة المبسطة التالية:

$$r_{y,x} = b\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{n}\sum X^2\right) - \bar{X}^2}{\left(\frac{1}{n}\sum Y^2\right) - Y^2}} \ldots\ldots\ldots(10)$$

1-1-معامل التحديد:

مؤشر احصائي آخر مهم في الانحدار البسيط يقيس جودة النموذج وتعطى قيمته كما يلي:

$$R^2 = {r_{y,x}}^2 \ldots\ldots\ldots(11)$$

$$R^2 \in [0 \quad 1]$$

كلما اقتربت قيمته من 1 نموذج ذو جودة عالية، ويكون رديء الجودة عندما يكون قريب من الصفر، ويمكن التعبير عنه كنسبة تفسيرX لـY.

2-الانحدار البسيط في حالة السلاسل الزمنية:

سيأتي شرحا مركزا للسلاسل الزمنية في الفصل الموالي، لكن ما يجب معرفته الآن وبالنسبة للانحدار البسيط يكون المتغير المفسر هو الزمن:

t=1, 2, 3,……….T

في شكل أعداد طبيعية تمثل السنوات أو الفصول أو الأشهر أو الأسابيع أو الأيام......، لكي تصبح (7) و(8) من الشكل:

$$b = \frac{\sum Y_i t_i - n\bar{Y}\bar{t}}{\sum t_i^2 - n\bar{t}^2} \ldots\ldots\ldots (7') \qquad ; a = \bar{Y} - b\bar{t} \ldots\ldots\ldots (8')$$

يكفي تحويل كل X في المعادلات إلى t. ويمكن الاستعانة ببعض المساواة الشهيرة:

$$\sum t = 1 + 2 + 3 + \cdots .. + t = \frac{T(T+1)}{2}$$

$$\sum t^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots .. t^2 = \frac{T(T+1)(2T+1)}{6}$$