

Série d'exercice N°06

Exercice 01 :

En utilisant le principe de Newton, déterminer l'équation du mouvement du structure à deux étages soumis à deux forces  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ , voir Figure 1.

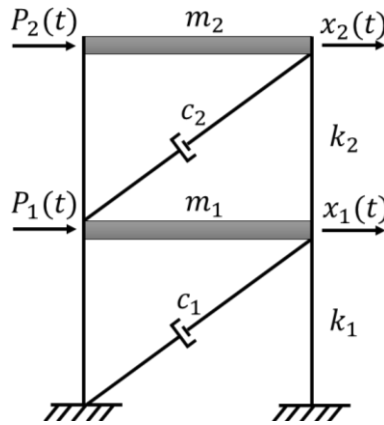


Figure .1

**Eléments de réponse :**

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix}$$

Exercice 02 :

On considère le système représenté par la Figure 2 :

1. En utilisant la modélisation brochette, déterminer l'équation du mouvement de la structure.
2. Déterminer les fréquences propres et les mode propres de cette structure.

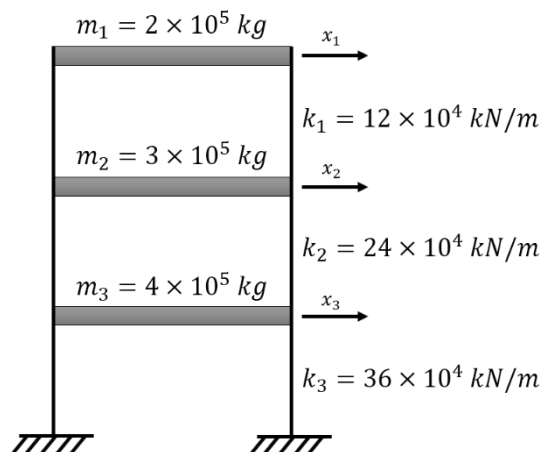


Figure .2

**Eléments de réponse :**

$$1. \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$2 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + 12 \times 10^7 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$2. \{\omega_i\} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14.522 \\ 31.408 \\ 46.100 \end{Bmatrix} \text{rad/sec}$$

$$[\phi_{ki}] = \{\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3\} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.6485 & -0.6066 & 2.5420 \\ 0.3018 & -0.6790 & -2.4395 \end{bmatrix}$$

### Exercice 03 :

On considère le système représenté par la Figure 3 :

1. Déterminer les fréquences propres et les modes propres
2. Vérifier les propriétés d'orthogonalités
3. Pour les conditions initiales :  $x_1(0) = x_0$ ,  $x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ , évaluer les expressions de  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ .

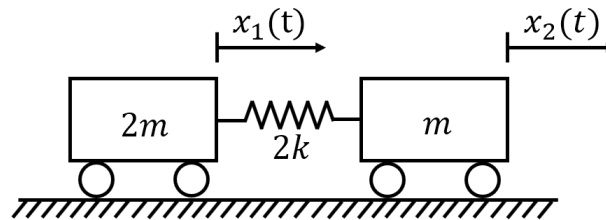


Figure .3

### Eléments de réponse :

1.  $\{\omega_i\} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \sqrt{3 \frac{k}{m}} \end{Bmatrix} \text{rad/sec}$  et  $[\phi_{ki}] = \{\phi_1 \quad \phi_2\} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 \\ 1.0000 & -2.0000 \end{bmatrix}$
2.  $\{\phi_1\}^T [k] \{\phi_2\} = 0$  et  $\{\phi_1\}^T [m] \{\phi_2\} = 0$
3.  $x_1(t) = \frac{2}{3}x_0 \cos \omega_1 t + \frac{1}{3}x_0 \cos \omega_2 t = \frac{x_0}{3} \left( 2 + \cos \sqrt{3 \frac{k}{m}} t \right)$  avec  $x_{1max} = x_0$  à  $t = 0$   
 $x_2(t) = \frac{2}{3}x_0 \cos \omega_1 t - \frac{2}{3}x_0 \cos \omega_2 t = \frac{2}{3}x_0 (1 - \cos \sqrt{3 \frac{k}{m}} t)$  avec  $x_{2max} = \frac{4}{3}x_0$  à  $t = \pi \sqrt{\frac{m}{3k}}$

### Exercice 04 :

Considérer la même structure de l'exo 02 :

1. Déterminer la fréquence et le mode propre du premier mode de vibration en utilisant :
  - a) La méthode de Rayleigh.
  - b) La méthode de Stodola.
  - c) La méthode de Holzer.
2. Déterminer la fréquence et le mode propre du deuxième et troisième mode de vibration en utilisant la méthode de Stodola.

### Eléments de réponse :

1. La pulsation fondamentale par la méthode de :  
 Rayleigh est :  $\omega_1 = 14.7708 \text{ rad/sec}$   
 Stodola est :  $\omega_1 = 14.7710 \text{ rad/sec}$   
 Holzer est :  $\omega_1 = 14.5207 \text{ rad/sec}$
2.  $\omega_2 = 31.0414 \text{ rad/sec}$  et  $\omega_3 = 46.1000 \text{ rad/sec}$