

Chapitre IV : Vibrations libres des S.P.D.D.L

IV.1. Introduction :

La Figure IV.2 montre la vibration libre d'une structure à 2DDL, cette vibration est déclenchée par les déflexions illustrées par la courbe a de la Figure IV.2.a. Le mouvement résultant x_i des deux masses (plancher) est tracé sur la Figure IV.2.d en fonction du temps. Les formes déviées de la structure à des instants a, b et c sont représentées sur la Figure IV.2.a et la fonction harmonique $Z_n(t)$ est également tracé sur la Figure IV.2.c.

Comme il est illustrée sur la Figure IV.2, le mouvement de ce système est périodique mais il n'est pas harmonique et la fréquence du mouvement ne peut pas être définie.

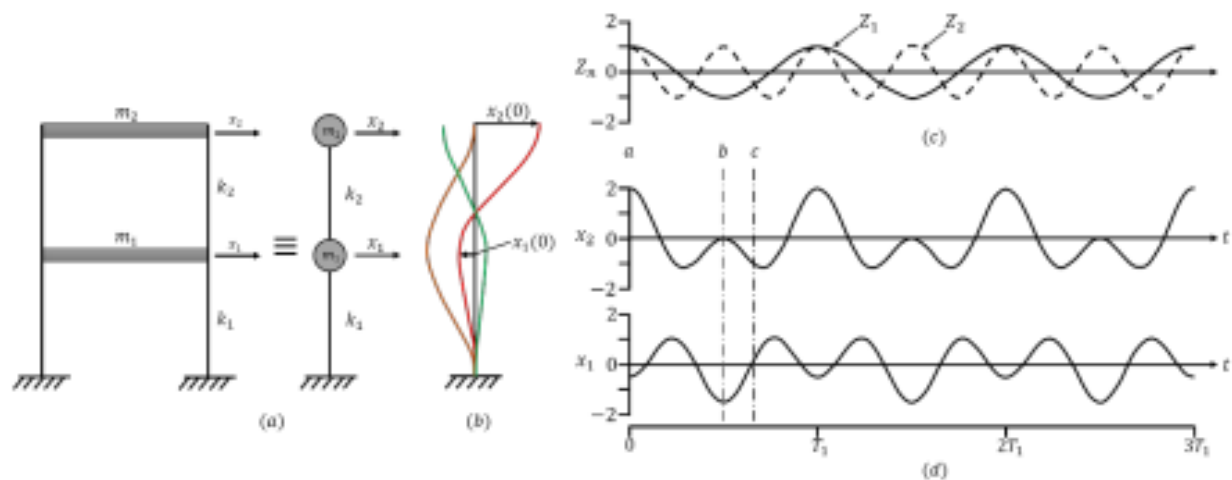


Figure IV.2. Vibration libre d'un système non amorti due à un déplacement initial arbitraire : (a) structure à deux étages; (b) des formes de déflexions aux instants a, b et c; (c) coordonnées modales $q_n(t)$; (d) l'historique des déplacements.

Les vibrations libres sont une succession de forme qui dépendent de la distribution de la masse, la rigidité et les conditions initiales. Pour ce système à 2DDL, il existe deux formes caractéristiques de telle sorte que s'il est déplacé dans l'une de ces formes :

- Les deux étages vibrent dans la même direction,
- Les deux étages vibrent dans des directions opposées.

Chaque forme de vibration correspond à une fonction harmonique oscillant avec une période, elle est appelée un mode de vibration naturel de ce système à 2DDL. Le mouvement en vibration libre peut être donc représenté par une superposition de mouvement harmonique.

Pour une meilleure illustration, chaque forme de vibration sera étudiée séparément.

a. Forme 1 : Les deux étages vibrent dans la même direction :

Dans ce cas et comme montre la Figure IV.3, le mouvement est décrit par une même fonction harmonique $Z_1(t)$ de période T_1 avec amplitudes différentes θ_{11} et θ_{21} .

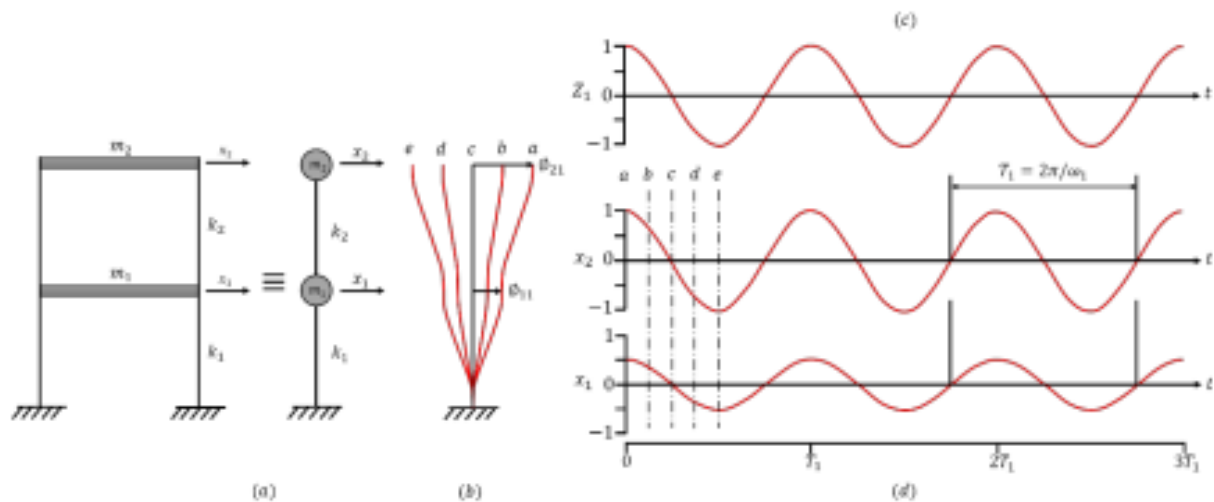


Figure IV.3. Vibration libre d'un système non amorti du premier forme de vibration : (a) structure à deux étages; (b) des formes de déflexions aux instants a, b, c, d et e; (c) coordonnées modales $q_n(t)$; (d) l'historique des déplacements.

La vibration libre de ce système dans la première forme peut être décrits mathématiquement par :

$$x_1^1 = \varnothing_{11} Z_1(t) \quad \text{et} \quad x_2^1 = \varnothing_{21} Z_1(t)$$

Donc, sous forme vectorielle est :

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_1 = \varnothing^{-1} Z_1(t) = \begin{pmatrix} \varnothing_{11} \\ \varnothing_{21} \end{pmatrix} Z_1(t) \quad (\text{IV.1})$$

b. Forme 2 : Les deux étages vibrent dans des directions opposées :

Le mouvement dans ce cas est décrit par une même fonction harmonique $Z_2(t)$ de période T_2 avec amplitudes différentes $\varnothing_{12}$ et $\varnothing_{22}$ (voir Figure IV.4).

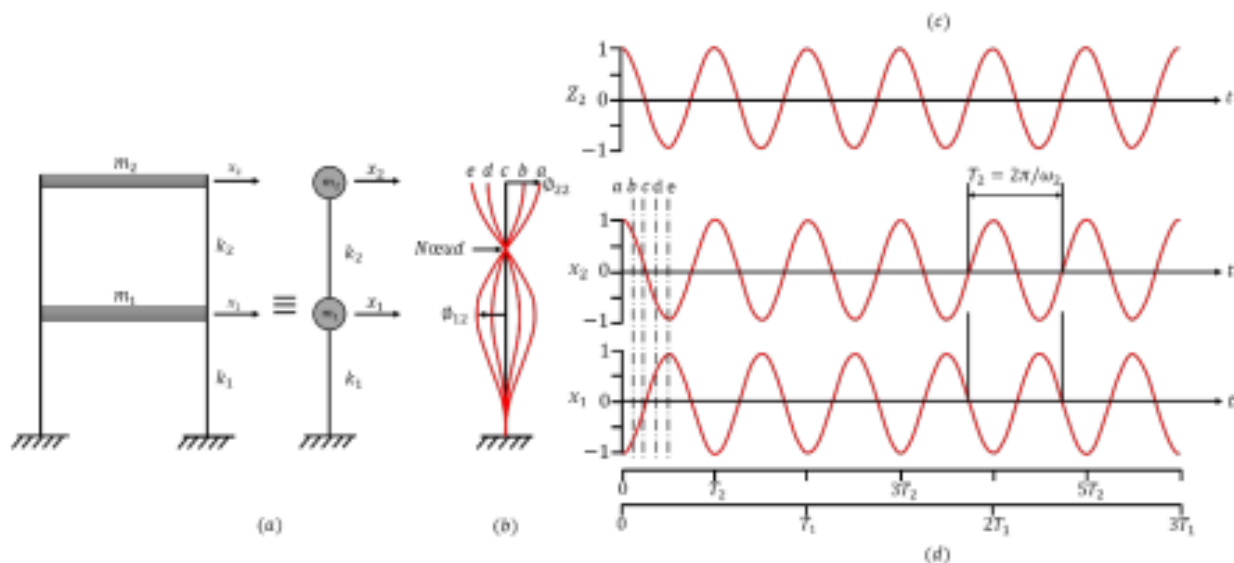


Figure IV.4. Vibration libre d'un système non amorti du deuxième forme de vibration : (a) structure à deux étages; (b) des formes de déflexions aux instants a, b, c, d et e; (c) coordonnées modales $q_n(t)$; (d) l'historique des déplacements.

La vibration pour la deuxième forme peut être décrits mathématiquement par :

$$x_1^2 = \varnothing_{12} Z_2(t) \quad \text{et} \quad x_2^2 = \varnothing_{22} Z_2(t)$$

Donc :

$$x_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_2 = \varnothing^2 Z_2(t) = \begin{pmatrix} \varnothing_{12} \\ \varnothing_{22} \end{pmatrix} Z_2(t) \quad (\text{IV.2})$$

Le déplacement général de cette structure est donc la superposition des déplacements obtenus à travers les deux différentes formes de vibrations :

$$x = x_1 + x_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_1 + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} \varnothing_{11} \\ \varnothing_{21} \end{pmatrix} Z_1(t) + \begin{pmatrix} \varnothing_{12} \\ \varnothing_{22} \end{pmatrix} Z_2(t) \quad (\text{IV.3})$$

Comme on a mentionnée précédemment, les différentes formes de vibration sont appelées modes propres de vibration, pour cette structure on a deux modes de vibration :

- Mode 1 : $\varnothing^1 = \begin{pmatrix} \varnothing_{11} \\ \varnothing_{21} \end{pmatrix}$, correspond au mouvement harmonique de période T_1 .
- Mode 2 : $\varnothing^2 = \begin{pmatrix} \varnothing_{12} \\ \varnothing_{22} \end{pmatrix}$, correspond au mouvement harmonique de période T_2 .

T_1 et T_2 sont nommées les périodes propres de vibration de la structure.

Dans le cas général, une structure à N étages possède N déplacement, N modes propres et N fréquences propres caractérisant le mouvement des DDL de la structure. Ainsi, on peut supposer que le mouvement d'une structure est la superposition des vibrations selon les divers modes propres. Chaque mode donne la forme de vibration, en le multipliant par une fonction temporelle on obtient l'amplitude.

$$x(t) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_1 + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_2 + \dots + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_n = \begin{pmatrix} \varnothing_{11} \\ \varnothing_{21} \\ \vdots \\ \varnothing_{n1} \end{pmatrix} Z_1(t) + \begin{pmatrix} \varnothing_{12} \\ \varnothing_{22} \\ \vdots \\ \varnothing_{n2} \end{pmatrix} Z_2(t) + \dots + \begin{pmatrix} \varnothing_{1n} \\ \varnothing_{2n} \\ \vdots \\ \varnothing_{nn} \end{pmatrix} Z_n(t) \quad (\text{IV.4})$$

Donc le déplacement en vibration libre peut s'écrire :

$$[x(t)] = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n [\varnothing_i] Z_i(t) = [\varnothing] [Z(t)] \quad (\text{IV.5})$$

Avec : $Z_i(t) = A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t$

Où :

x_i : déplacement au mode i ,

$\{\varnothing_i\}$: vecteur de mode propre,

$Z_i(t)$: fonction harmonique de période $T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$,

A_i et B_i : constantes déterminés en utilisant les conditions initiales,

ω_i : pulsation propre au mode i ,

$$[\varnothing] : \text{Matrice modale ; } [\varnothing] = \begin{bmatrix} \left(\begin{matrix} \varnothing_{11} \\ \varnothing_{21} \\ \vdots \\ \varnothing_{n1} \end{matrix} \right) & \left(\begin{matrix} \varnothing_{12} \\ \varnothing_{22} \\ \vdots \\ \varnothing_{n2} \end{matrix} \right) & \dots & \left(\begin{matrix} \varnothing_{1n} \\ \varnothing_{2n} \\ \vdots \\ \varnothing_{nn} \end{matrix} \right) \end{bmatrix} ,$$

$$[Z(t)] : \text{vecteur de déplacement en coordonnées modales ; } Z_i(t) = \begin{pmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \\ \vdots \\ Z_n(t) \end{pmatrix} .$$

IV.2. Analyse modale :

IV.2.1. Evaluation du fréquences propres et modes propres du système non amortie :

L'équation du mouvement du système libre non amortie est :

$$[m][\ddot{x}] + [k][x] = 0 \quad (\text{IV.6})$$

Chaque point de la structure subit un mouvement harmonique, la solution de ce système d'équations différentielles est de la forme :

$$[x(t)] = \sum_{i=1}^n [\varnothing_i] Z_i(t) = [\varnothing][Z(t)] \quad (\text{IV.7})$$

Reportant (IV.7) dans (IV.6), il vient :

$$([k] - \omega^2[m])[\varnothing][Z(t)] = 0 \quad (\text{IV.8})$$

D'après la règle de Cramer le système matriciel (IV.8) n'a de solution non triviale ($[\varnothing] \neq 0, [Z(t)] \neq 0$) que si, et seulement si, son déterminant est nul.

$$\det([k] - \omega^2[m]) = 0 \quad (\text{IV.9})$$

Les matrices $[k]$ et $[m]$ étant définies positives, il en résulte que l'équation (IV.9) possède n racines réelles ω_i^2 où n est la dimension des matrices $[k]$ et $[m]$, c'est-à-dire le nombre de degrés de liberté du système. Ces racines sont les valeurs propres du système (IV.8).

La plus faible pulsation est notée ω_1 , on l'appelle souvent pulsation fondamentale ($\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_i < \dots < \omega_n$).

On nomme fréquence propre du système les quantités :

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} \quad (\text{IV.10})$$

qui sont au nombre de n . La plus faible fréquence f_1 est dénommée fréquence fondamentale, f_2 fréquence d'ordre 2, etc....

A chaque valeur propre ω_i^2 est associé un vecteur propre $\{\vartheta_i\}$, solution de l'équation :

$$([k] - \omega_i^2 [m])\{\vartheta_i\} = 0 \quad (\text{IV.11})$$

qui du fait que ω_i^2 est valeur propre du système est non nul et défini à une constante multiplicative près :

$$\{\vartheta_i\}^T = \{\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n\} \quad (\text{IV.12})$$

Le système possède n vecteurs propres associés aux valeurs propres. Ces vecteurs propres sont appelés **modes propres** du système. Les modes propres sont habituellement normalisés par rapport à la plus grande composante :

$$\{\vartheta_k\}^i = \begin{pmatrix} 1 \\ \vartheta_2 \\ \vdots \\ \vartheta_n \end{pmatrix}$$

Où, i représente la classe modale et k indique le degré de liberté.

Généralement $\vartheta_1^i = 1$

La solution générale de l'équation (IV.8) s'écrit alors :

$$\{x\} = \sum_{i=1}^n \{\vartheta_i\} Z_i(t) = \sum_{i=1}^n \{\vartheta_i\} (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t) \quad (\text{IV.13})$$

où les constantes A_i et B_i sont déterminées par les conditions initiales et les modes de vibration $\{\vartheta_i\}$ sont définis à une constante multiplicative près.

$\{\vartheta_i\}$ nous donne l'allure ou bien la forme de la vibration correspondante à ω_i .

La figure ci-dessous montre l'allure de chaque mode d'une structure à 3DDL.

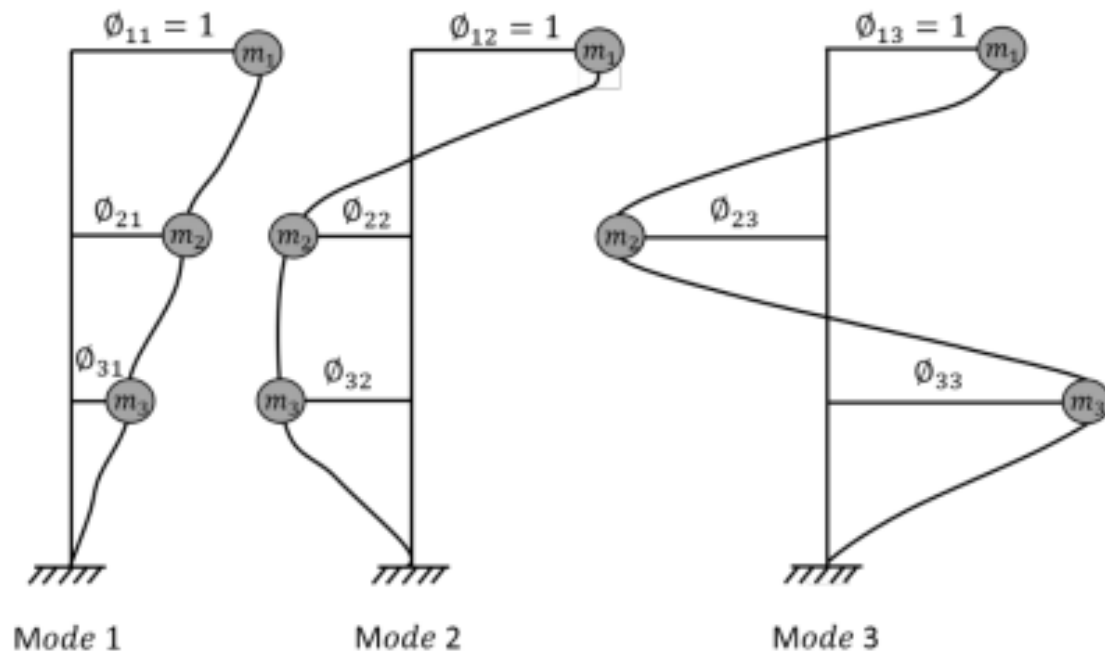


Figure IV.5. Modes propres.

Les N valeurs propres ω_n^2 et N modes propres ϕ_{kn} peuvent être assemblés en matrices.

Matrice spectrale :

$$[\omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

Matrice modale :

$$[\phi] = [\phi_{ki}] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix}$$

Où, i représente la classe modale et k indique le degré de liberté.

En utilisant les matrices spectrale et modale, on obtient :

$$[k][\phi] = [m][\phi][\omega^2] \quad (\text{IV.14})$$

Remarque :

On peut également utiliser la matrice de flexibilité pour trouver les solutions. En multipliant l'équation (IV.8) par l'inverse de la matrice de rigidité $[k]^{-1}$:

$$[k]^{-1}([k] - \omega^2[m])[\phi][Z(t)] = 0 \quad (\text{IV.15})$$

on obtient :

$$(1 - [k]^{-1}\omega^2[m])[\phi][Z(t)] = 0 \quad (\text{IV.16})$$

L'inverse de la matrice de rigidité est la matrice de flexibilité (souplesse)
 $[k]^{-1} = [\check{f}]$, donc :

$$(1 - [\check{f}] \omega^2 [m]) [\check{\theta}] [Z(t)] = 0 \quad (\text{IV.17})$$

Le système matriciel (IV.17) n'a de solution non triviale ($[\check{\theta}] \neq 0, [Z(t)] \neq 0$) que si, et seulement si, son déterminant est nul.

$$\det(1 - [\check{f}] \omega^2 [m]) = 0 \quad (\text{IV.18})$$

En divisant l'équation (IV.18) par ω^2 , selon la règle de Cramer la solution est de frome :

$$\det\left(\frac{1}{\omega^2} [I] - [\check{f}] [m]\right) = 0 \quad (\text{IV.19})$$

Où $[I]$ est la matrice unitaire.

La détermination des modes propres se fera de la même manière que précédemment où à chaque valeur propre ω_i^2 est associé un vecteur propre $[\check{\theta}_i]$, solution de l'équation :

$$\left(\frac{1}{\omega_i^2} [I] - [\check{f}] [m]\right) [\check{\theta}_i] = 0 \quad (\text{IV.20})$$

Exemple :

Considérons la structure à 3 niveaux de la Figure IV.6.1.

Données : $m = 2 \times 10^5 \text{ kg}$, $k = 12 \times 10^7 \text{ N/m}$

$m_3 = m = 2 \times 10^5 \text{ kg}$, $m_2 = 1.5 m$, $m_1 = 2 m$

$k_3 = k = 12 \times 10^7 \text{ N/m}$, $k_2 = 2k$, $k_1 = 3k$

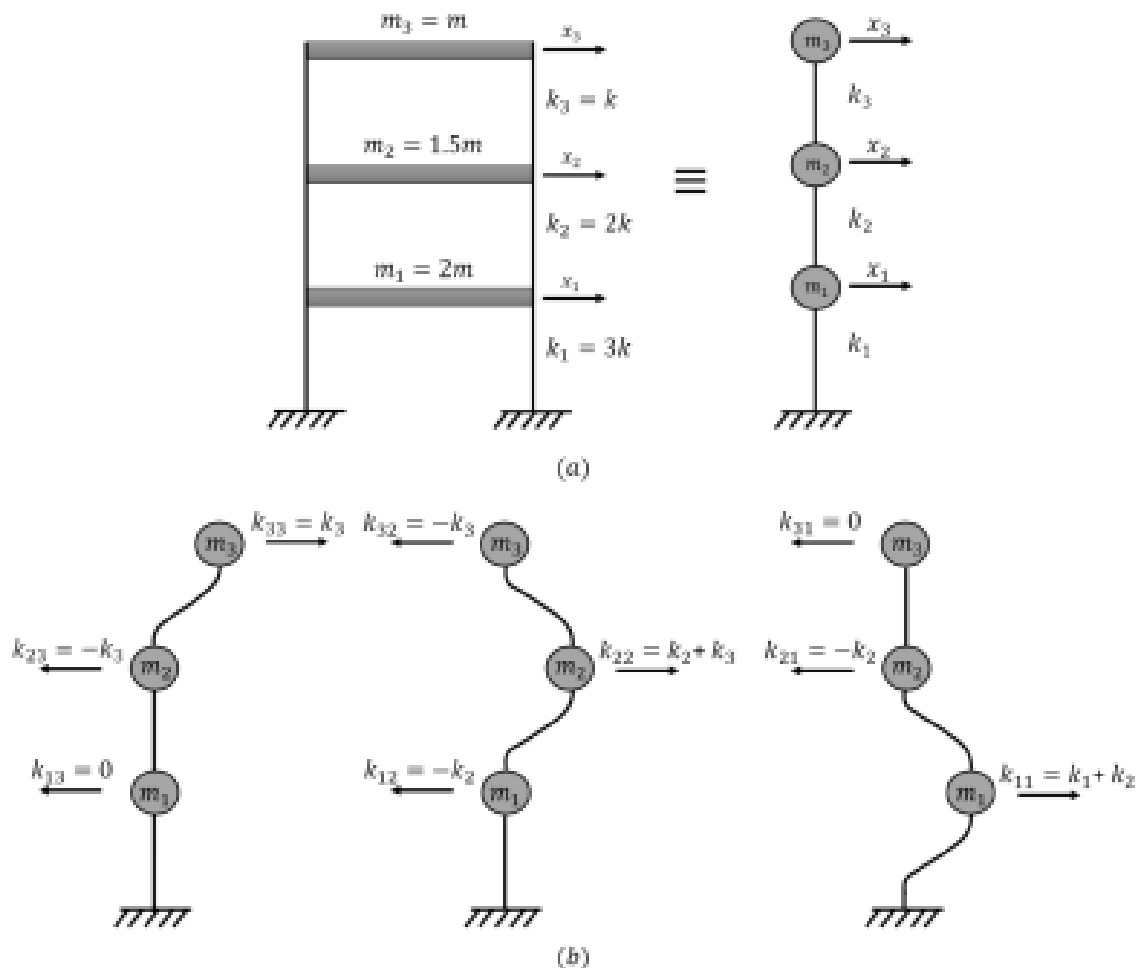


Figure IV.6.1. Etude des vibrations : (a) définition de la structure ; (b) coefficients d'influence de rigidité.

Les matrices de masse et de rigidité de cette structure peuvent s'écrire :

$$[m] = 2 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ kg} \quad [k] = 12 \times 10^7 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \text{ N/m}$$

Ou bien :

$$[m] = 2 \times 10^5 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ kg} \quad [k] = 12 \times 10^7 \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ N/m}$$

D'où :

$$[k] - \omega^2 [m] = 12 \times 10^7 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} 2 \times 10^5$$

$$= 12 \times 10^7 \begin{bmatrix} 1-A & -1 & 0 \\ -1 & 3-1.5A & -2 \\ 0 & -2 & 5-2A \end{bmatrix}$$

Avec : $A = \frac{\omega^2}{600}$

Les fréquences de la structure sont donc données par cette équation du troisième degré suivante, obtenue en annulant le déterminant de la matrice ($\Delta=0$) :

$$A^3 - 5.5 A^2 + 7.5 A - 2 = 0$$

Les trois solutions de cette équation sont :

$$A_1 = 0.3515, \quad A_2 = 1.6066, \quad A_3 = 3.5420$$

Par conséquent, les fréquences sont :

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.522 \\ 31.048 \\ 46.100 \end{pmatrix} \text{ rad/sec}$$

Les modes vibratoires peuvent être déterminés par utilisation de l'équation (IV.11) :

$$([k] - \omega_i^2 [m]) \{\vartheta_i\} = 0$$

Où à chaque valeur propre ω_i^2 est associé un vecteur propre $\{\vartheta_i\}$

Mode 1 : $\omega_1 = 14.522 \text{ rad/sec}$ et $A_1 = 0.3515$

$$([k] - \omega_1^2 [m]) \{\vartheta_1\} = 0$$

On a

$$[k] - \omega_1^2 [m] = 12 \times 10^7 \begin{bmatrix} 1 - A_1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 - 1.5 A_1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 - 2 A_1 \end{bmatrix}$$

Avec : $A_i = \frac{\omega_i^2}{600}$

Alors :

$$\begin{aligned} ([k] - \omega_1^2 [m]) \{\vartheta_1\} &= 12 \times 10^7 \begin{bmatrix} 1 - A_1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 - 1.5 A_1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 - 2 A_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_{31} \\ \vartheta_{21} \\ \vartheta_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 12 \times 10^7 \begin{bmatrix} 0.6485 & -1 & 0 \\ -1 & 2.4728 & -2 \\ 0 & -2 & 4.2970 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_{31} \\ \vartheta_{21} \\ \vartheta_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$12 \times 10^7 (0.6485 \vartheta_{31} - \vartheta_{21}) = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$12 \times 10^7 (-2 \vartheta_{21} + 4.2970 \vartheta_{11}) = 0 \dots\dots\dots (2)$$

On sait que $\vartheta_{11} = 1 \rightarrow \vartheta_{31} = 1$

Alors de l'équation (1) on trouve : $\vartheta_{21} = 0.6485$

de l'équation (2) on trouve : $\vartheta_{11} = 0.3018$

Donc le 1^{er} mode de vibration :

$$\vartheta_1 = \begin{pmatrix} \vartheta_{31} \\ \vartheta_{21} \\ \vartheta_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.6485 \\ 0.3018 \end{pmatrix}$$

Mode 2 : $\omega_2 = 31.048$ et $A_2 = 1.6066$

$$12 \times 10^7 \begin{bmatrix} -0.6066 & -1 & 0 \\ -1 & 0.5901 & -2 \\ 0 & -2 & 1.7868 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_{32} \\ \vartheta_{22} \\ \vartheta_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$12 \times 10^7 (-0.6066 \vartheta_{32} - \vartheta_{22}) = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$12 \times 10^7 (-2 \vartheta_{22} + 1.7868 \vartheta_{12}) = 0 \dots\dots\dots (4)$$

On a : $\vartheta_{32} = 1$

Alors de l'équation (3) on trouve : $\vartheta_{22} = -0.6066$

de l'équation (4) on trouve : $\vartheta_{12} = 0.6790$

Donc le 2^{ème} mode de vibration :

$$\vartheta_2 = \begin{pmatrix} \vartheta_{32} \\ \vartheta_{22} \\ \vartheta_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ -0.6066 \\ 0.6790 \end{pmatrix}$$

Mode 3 : $\omega_3 = 46.100$ et $A_3 = 3.5420$

$$12 \times 10^7 \begin{bmatrix} -2.542 & -1 & 0 \\ -1 & -2.313 & -2 \\ 0 & -2 & -2.084 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_{33} \\ \vartheta_{23} \\ \vartheta_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$12 \times 10^7 (-2.542 \vartheta_{33} - \vartheta_{23}) = 0 \dots\dots\dots (5)$$

$$12 \times 10^7 (-2 \vartheta_{23} - 2.084 \vartheta_{13}) = 0 \dots\dots\dots (6)$$

On a : $\vartheta_{33} = 1$

Alors de l'équation (5) on trouve : $\vartheta_{23} = 2.5420$

de l'équation (6) on trouve : $\vartheta_{13} = -2.4395$

Donc le 3^{ème} mode de vibration :

$$\Phi_3 = \begin{Bmatrix} \Phi_{33} \\ \Phi_{23} \\ \Phi_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 2.5420 \\ -2.4395 \end{Bmatrix}$$

La matrice modale :

$$[\Phi_{ki}] = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3] = \begin{bmatrix} \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} \\ \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.6485 & -0.6066 & 2.5420 \\ 0.3018 & 0.6790 & -2.4395 \end{bmatrix}$$

Rappel : Le coefficient Φ_{ki} représente le mode de vibration de degré de liberté k à la classe modale i .

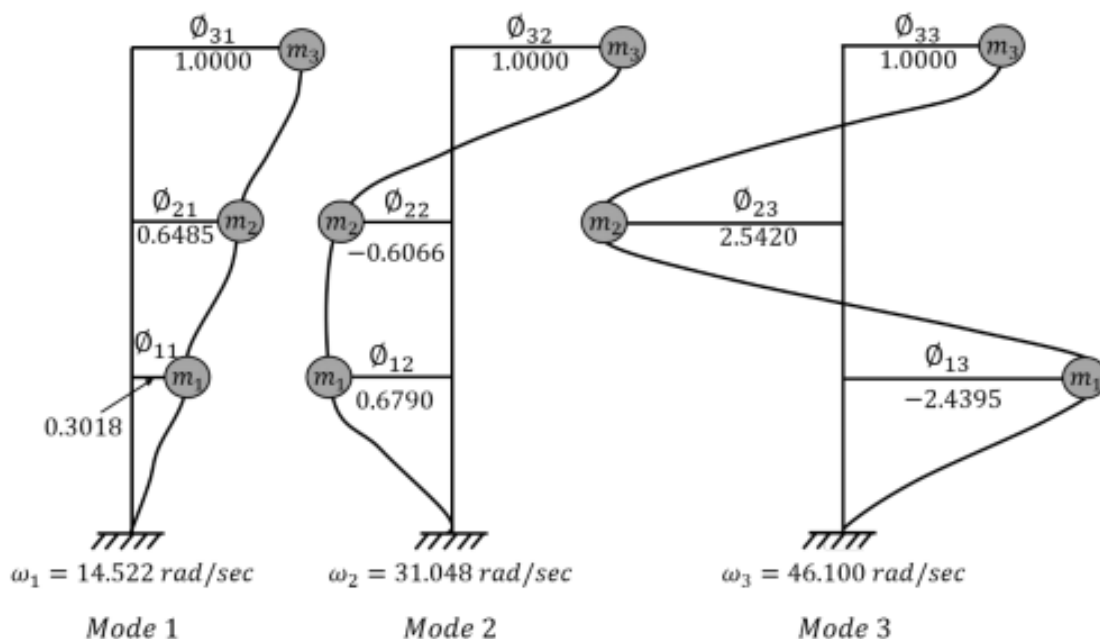


Figure IV.6.2. Modes de vibration de la structure en Figure IV.6.1.

IV.2.2. Orthogonalités des modes :

On peut démontrer par l'application de la loi de Betti que les modes propres correspondant à différentes fréquences propres satisfont aux conditions d'orthogonalité suivantes, quand : $\omega_n \neq \omega_m$

$$[\Phi_n]^T [k] [\Phi_m] = 0 \quad [\Phi_n]^T [m] [\Phi_m] = 0 \quad (\text{IV.21})$$

Ces propriétés importantes peuvent être prouvées comme suit : La $n^{\text{ème}}$ fréquence naturelle et le mode satisfont à l'équation :

$$[k] [\Phi_n] = \omega_n^2 [m] [\Phi_n] \quad (\text{IV.22})$$

En multipliant par la transposée de $n^{\text{ème}}$ vecteur de $[\Phi_m]$:

$$[\Phi_m]^T [k] [\Phi_n] = \omega_n^2 [\Phi_m]^T [m] [\Phi_n] \quad (\text{IV.23})$$

De même, la $m^{\text{ième}}$ fréquence naturelle et le mode satisfont à l'équation (IV.22), donc, $[k][\varnothing_m] = \omega_m^2 [m][\varnothing_m]$, en multipliant par la transposé de $m^{\text{ième}}$ vecteur de $[\varnothing_n]$, on obtient :

$$[\varnothing_n]^T [k][\varnothing_m] = \omega_m^2 [\varnothing_n]^T [m][\varnothing_m] \quad (\text{IV.24})$$

La transposée de la matrice sur le côté gauche de l'équation. (IV.23) sera égale à la transposée de la matrice sur le côté droit de l'équation, Donc :

$$[\varnothing_n]^T [k][\varnothing_m] = \omega_n^2 [\varnothing_n]^T [m][\varnothing_m] \quad (\text{IV.25})$$

où nous avons utilisé la propriété de symétrie des matrices de masse et de rigidité. Soustraire Eq. (IV.24) de (IV.25) donne :

$$(\omega_n^2 - \omega_m^2) [\varnothing_n]^T [m][\varnothing_m] = 0 \quad (\text{IV.26})$$

Ainsi, l'équation (IV.21.b) est satisfaite lorsque $\omega_n^2 \neq \omega_m^2$, ce qui pour les systèmes à fréquences naturelles positives implique que $\omega_n \neq \omega_m$. Remplacer l'équation (IV.21.b) dans (IV.24) indique que l'équation (IV.21.a) est satisfaite lorsque $\omega_n \neq \omega_m$. Ceci complète une preuve pour les relations d'orthogonalité de l'équation (IV.21).

Nous avons établi les relations d'orthogonalité entre les modes avec les fréquences distinctes ($\omega_n \neq \omega_m$). Si l'équation de fréquence (IV.22) a une racine multiple de j (c'est-à-dire que le système a une fréquence répétée j fois), il est toujours possible de trouver j modes associés à cette fréquence qui satisfont à l'équation (IV.21). Si ces j modes sont inclus avec les modes correspondant aux autres fréquences, on obtient un ensemble de N modes satisfaisant l'équation (IV.21) pour $n \neq m$.

L'orthogonalité des modes naturels implique que les matrices carrées suivantes sont diagonales :

$$K \equiv [\varnothing]^T [k][\varnothing] \quad M \equiv [\varnothing]^T [m][\varnothing] \quad (\text{IV.27})$$

où les éléments diagonaux sont :

$$K_n = [\varnothing_n]^T [k][\varnothing_n] \quad M_n = [\varnothing_n]^T [m][\varnothing_n] \quad (\text{IV.28})$$

Puisque $[m]$ et $[k]$ sont définis positifs, les éléments diagonaux de K et M sont positifs. Ils sont liés par :

$$K_n = \omega_n^2 M_n \quad (\text{IV.29})$$

Cela peut être démontré à partir des définitions de K_n et M_n comme suit : Substitution l'équation (IV.22) dans (IV.23) donne :

$$K_n = [\varnothing_n]^T (\omega_n^2 [m][\varnothing_n]) = \omega_n^2 ([\varnothing_n]^T [m][\varnothing_n]) = \omega_n^2 M_n \quad (\text{IV.30})$$

IV.3. Evaluation du mode de vibration**IV.3.1. Méthode de Rayleigh :**

Dans cette section, le quotient de Rayleigh est présenté parce qu'il est nécessaire dans les méthodes d'itération vectorielle pour la détermination des pulsations fondamentales. Si Eq. (IV.14) est pré-multiplié par $\{\delta\}^T$, l'équation scalaire suivante est obtenue :

$$\{\delta\}^T [k] \{\delta\} = \lambda \{\delta\}^T [m] \{\delta\} \quad (\text{IV.31})$$

Où : $\lambda = \omega^2$

La précision positive de $[m]$ garantit que $\{\delta\}^T [m] \{\delta\}$ est non nul, de tel sorte qu'il est permis de résoudre pour le scalaire λ :

$$\lambda = \frac{\{\delta\}^T [k] \{\delta\}}{\{\delta\}^T [m] \{\delta\}} \quad (\text{IV.32})$$

qui dépend évidemment du vecteur $\{\delta\}$. Ce quotient est appelé quotient de Rayleigh. Il peut également être dérivé en assimilant la valeur maximale de l'énergie cinétique à la valeur maximale de l'énergie potentielle en supposant que le système vibrant exécute un mouvement harmonique simple à la fréquence ω avec la forme déviée donnée par $\{\delta\}$.

IV.32. Méthode de Stodola :

La meilleure méthode de calcul dynamique à la main est sans doute celle de Stodola.

Détermination du mode fondamental :

La meilleure méthode de calcul dynamique à la main est sans doute celle de Stodola, que nous présentons ici sous forme matricielle. La méthode est fondée sur l'Eq. (IV.17), que l'on peut écrire :

$$\frac{1}{\omega^2} \{\delta\} [Z(t)] = [\ddot{f}] [m] \{\delta\} [Z(t)] \quad (\text{IV.33})$$

Le produit matriciel $[\ddot{f}] [m]$ caractérise les propriétés dynamiques de la structure. On l'appelle matrice dynamique et on le note $[D]$:

$$[D] = [\ddot{f}] [m] \quad (\text{IV.34})$$

L'Eq. (IV.33) devient :

$$\frac{1}{\omega^2} \{\delta\} [Z(t)] = [D] \{\delta\} [Z(t)] \quad (\text{IV.35})$$

Cette dernière équation ne sera satisfaite que par les vecteurs qui représentent un mode de vibration vrai ; il en existe N et le but de la méthode de Stodola est de tous les déterminer, ou d'en déterminer un certain nombre.

On commence par se donner un vecteur initial $\{x_1^{(0)}\}$, qui doit représenter au mieux le premier mode; son amplitude est arbitraire. L'indice inférieur 1 caractérise le premier mode et l'indice supérieur (0) indique qu'il s'agit de l'hypothèse initiale. Si on introduit ce vecteur dans le second membre de l'Eq. (IV.35), une nouvelle déformée sera obtenue en multipliant à gauche par $[D]$:

$$\frac{1}{\omega^2} \{x_1^{(1)}\} = [D] \{x_1^{(0)}\} \quad (IV.36)$$

En général la nouvelle déformée différera de l'hypothèse initiale, sauf s'il s'agit du mode vrai ; on lui attribue l'indice supérieur (1). En pratique l'Eq. (IV.36) ne pourra pas être écrite directement car la fréquence de vibration n'est pas connue. Le produit matriciel de D par la déformée $\{x_1^{(0)}\}$ sera désigné par $\{\bar{x}_1^{(1)}\}$:

$$\{\bar{x}_1^{(1)}\} = [D] \{x_1^{(0)}\} \quad (IV.37)$$

$\{\bar{x}_1^{(1)}\}$ est proportionnel à la déformée calculée, $\frac{1}{\omega_1^2}$ étant le facteur de proportionnalité inconnu. Si on compare les Eqs. (IV.36) et (IV.37) :

$$\frac{1}{\omega_1^2} \{x_1^{(1)}\} = \{\bar{x}_1^{(1)}\} \quad (IV.38)$$

Si on suppose que l'amplitude calculée est égale à l'amplitude initiale, une équation équivalente à l'Eq. (IV.38) permet de calculer la fréquence. Considérons la coordonnée de déplacement d'un point arbitraire k ; on a

$$\bar{x}_{k1}^{(1)} = \frac{1}{\omega_1^2} x_{k1}^{(0)} \quad (IV.39)$$

Où :

$$\omega_1^2 = \frac{x_{k1}^{(0)}}{x_{k1}^{(1)}} \quad (IV.40)$$

Si la déformée supposée était un mode vrai, la même fréquence serait obtenue en calculant le rapport de l'Eq. (IV.40) pour n'importe quelle coordonnée de la structure. En règle générale la déformée $\bar{x}^{(1)}$ différera de $x^{(0)}$, et un résultat différent sera obtenu pour chacune des coordonnées. La vraie fréquence du premier mode sera alors située entre les valeurs maximum et minimum obtenues à partir de l'Eq. (IV.40) :

$$\left(\frac{x_{k1}^{(0)}}{\bar{x}_{k1}^{(1)}} \right)_{\min} < \omega_1^2 < \left(\frac{x_{k1}^{(0)}}{\bar{x}_{k1}^{(1)}} \right)_{\max} \quad (IV.41)$$

Il résulte de cette propriété qu'une meilleure approximation de la fréquence sera obtenue par tout procédé utilisant des valeurs moyennes. L'un des meilleurs de ces procédés consiste à utiliser la répartition massique comme facteur de pondération. Si on multiplie à gauche les 2 membres de l'Eq. (IV.39) par $\{\bar{x}_1^{(1)}\}^T [m]$ et que l'on calcule ω_1^2 , on obtient ainsi :

$$\omega_1^2 = \frac{\{\bar{x}_1^{(1)}\}^T [m] \{x_1^{(0)}\}}{\{\bar{x}_1^{(1)}\}^T [m] \{\bar{x}_1^{(1)}\}} \quad (IV.42)$$

Cette équation représente la meilleure approximation possible de la fréquence à l'aide d'une seule itération effectuée à partir d'une hypothèse initiale quelconque sur le mode $\{x_1^{(0)}\}$ (l'équivalence de cette expression et de celle de la méthode de Rayleigh améliorée (IV.32) vaut la peine d'être remarquée). La déformée calculée $\{x_1^{(1)}\}$ représente une meilleure approximation du premier mode que ne l'était $\{x_1^{(0)}\}$. Par conséquent, si $\{x_1^{(1)}\}$ et la déformée $\{\bar{x}_1^{(2)}\}$ qui en résulte sont utilisées dans les Eqs. (IV.40) ou (IV.42), la fréquence obtenue sera également une meilleure approximation que ne l'était celle calculée à partir de l'hypothèse initiale. En répétant le procédé un certain nombre de fois, l'approximation du mode peut être améliorée jusqu'au degré de précision désiré. Autrement dit, après s cycles :

$$\{\bar{x}_1^{(s)}\} = \frac{1}{\omega_1^2} \{x_1^{(s-1)}\} = \frac{1}{\omega_1^2} \{\emptyset_1\} \quad (IV.43)$$

$\{\bar{x}_1^{(s)}\}$ et $\{x_1^{(s-1)}\}$ peuvent être calculés jusqu'à n'importe quel nombre de décimales. Lorsque le procédé a convergé de façon satisfaisante, la fréquence vraie est obtenue en écrivant l'égalité des déplacements maximum :

$$\omega_1^2 = \frac{(x_{k1}^{(s-1)})_{max}}{(\bar{x}_{k1}^{(s)})_{max}} = \frac{1}{(\bar{x}_{k1}^{(s)})_{max}} \quad (IV.44)$$

Lorsque le mode de vibration vrai a été déterminé il n'y a plus lieu d'utiliser le procédé de moyenne pondérée (IV.42) pour améliorer la solution.

Preuve de convergence de la méthode :

La déformée initialement supposée peut être exprimée au moyen des coordonnées principales :

$$\{x_1^{(0)}\} = [\emptyset] \{Z^{(0)}\} = \{\emptyset_1\} Z_1^{(0)} + \{\emptyset_2\} Z_2^{(0)} + \dots + \{\emptyset_n\} Z_n^{(0)} \quad (IV.45)$$

La coordonnée $Z_1^{(0)}$ sera relativement importante si le choix initial de la déformée est bon. Les forces d'inertie relatives à cette déformée associée à la fréquence du premier mode sont :

$$\{F_I^{(0)}\} = \omega_1^2 [m] \{x_1^{(0)}\} = \omega_1^2 [m] [\emptyset] \{Z^{(0)}\} \quad (IV.46)$$

En développant $\{x_1^{(0)}\}$ comme on l'a fait à l'Eq. (IV.45) et en remplaçant ω_1^2 par $\omega_i^2 (\omega_1/\omega_i)^2$, on obtient :

$$\{F_I^{(0)}\} = [m] \left(\{\emptyset_1\} \omega_1^2 Z_1^{(0)} + \{\emptyset_2\} \omega_2^2 Z_2^{(0)} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 + \dots + \{\emptyset_n\} \omega_n^2 Z_n^{(0)} \left(\frac{\omega_1}{\omega_n} \right)^2 \right) \quad (IV.47)$$

Les flèches résultant de ces forces d'inertie sont :

$$\{\bar{x}_1^{(1)}\} = [\check{f}] \{F_I^{(0)}\} = [\check{f}] [m] \left(\{\emptyset_1\} \omega_1^2 Z_1^{(0)} + \{\emptyset_2\} \omega_2^2 Z_2^{(0)} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 + \dots + \{\emptyset_n\} \omega_n^2 Z_n^{(0)} \left(\frac{\omega_1}{\omega_n} \right)^2 \right) \quad (IV.48)$$

Où :

$$\{\bar{x}_1^{(1)}\} = \sum_{i=1}^n [D] \{\emptyset_i\} \omega_i^2 Z_i^{(0)} \left(\frac{\omega_1}{\omega_i} \right)^2 \quad (IV.49)$$

Si on multiplie les deux côtés de l'Eq. (IV.22) par $[\check{f}]$, on obtient :

$$\{\emptyset_i\} = \omega_i^2 [D] \{\emptyset_i\} \quad (IV.50)$$

on peut alors réécrire l'Eq. (IV.49) sous la forme :

$$\{\bar{x}_1^{(1)}\} = \sum_{i=1}^n \{\emptyset_i\} Z_i^{(0)} \left(\frac{\omega_1}{\omega_i} \right)^2 \quad (IV.51)$$

La forme finale améliorée du premier cycle $\{x_1^{(1)}\}$ est alors obtenue en normalisant ce vecteur, en le divisant par son plus grand élément, $\{\bar{x}_1^{(1)}\}_{max}$,
Donc :

$$\{x_1^{(1)}\} = \frac{\{\bar{x}_1^{(1)}\}}{\{\bar{x}_1^{(1)}\}_{max}} = \frac{\sum_{i=1}^n \{\emptyset_i\} Z_i^{(0)} \left(\frac{\omega_1}{\omega_i} \right)^2}{\{\bar{x}_1^{(1)}\}_{max}} \quad (IV.52)$$

Suivre la même procédure pour un autre cycle d'itération conduit alors à :

$$\{x_1^{(2)}\} = \frac{\{\bar{x}_1^{(2)}\}}{\{\bar{x}_1^{(2)}\}_{max}} = \frac{\sum_{i=1}^n \{\emptyset_i\} Z_i^{(0)} \left(\frac{\omega_1}{\omega_i} \right)^4}{\{\bar{x}_1^{(2)}\}_{max}} \quad (IV.53)$$

Après s cycles on obtient :

$$\begin{aligned} \{x_1^{(s)}\} &= \frac{\{\bar{x}_1^{(s)}\}}{\{\bar{x}_1^{(s)}\}_{max}} = \frac{\sum_{i=1}^n \{\emptyset_i\} Z_i^{(0)} \left(\frac{\omega_1}{\omega_i} \right)^{2s}}{\{\bar{x}_1^{(s)}\}_{max}} \\ &= \frac{1}{\{\bar{x}_1^{(s)}\}_{max}} \left(\{\emptyset_1\} Z_1^{(0)} + \{\emptyset_2\} Z_2^{(0)} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^{2s} + \dots + \{\emptyset_n\} Z_n^{(0)} \left(\frac{\omega_1}{\omega_n} \right)^{2s} \right) \end{aligned} \quad (IV.54)$$

La dernière égalité résulte du fait que le coefficient correspondant au premier mode est beaucoup plus élevé que les autres coefficients, c'est-à-dire que :

$$1 \gg \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^{2s} \gg \dots \gg \left(\frac{\omega_1}{\omega_n} \right)^{2s} \quad (\text{IV.55})$$

Le résultat final est :

$$\{x_1^{(s)}\} = \frac{\{\varnothing_1\} Z_1^{(0)}}{\left(\{\varnothing_1\} Z_1^{(0)} \right)_{\max}} \equiv \{\varnothing_1\} \quad (\text{IV.56})$$

Il est évident d'après l'Eq. (IV.55) que la contribution à la déformée $\{x_1^{(s)}\}$ de chaque mode d'ordre supérieur peut être rendue aussi faible que l'on veut si on itère un nombre suffisant de fois. La contribution du premier mode représente donc la déformée résultante. Il résulte de tout cela que le procédé doit converger vers le premier mode dans la mesure où la contribution du premier mode à la déformée initiale $\{x_1^{(0)}\}$ n'est pas nulle.

Détermination des modes suivants de Stodola :

Les matrices appropriées pour calculer n'importe quel mode peuvent être obtenues facilement par l'équation suivante :

$$[D_{i+1}] = [D][S_i] \quad [S_i] = [S_{i-1}] \frac{1}{M_i} \{\varnothing_i\} \{\varnothing_i\}^T [m] \quad (\text{IV.57})$$

Où :

$[D_{i+1}]$: La matrice dynamique

$[S_i]$: La matrice de balayage avec $[S_0] = [I]$: la matrice unitaire,

$M_i = \{\varnothing_i\}^T [m] \{\varnothing_i\}$: la masse généraliser du mode i .

IV.3.3. Méthode de Holzer :

Le principe de la méthode de Stodola est l'ajustement successif d'une déformée supposée jusqu'à la forme véritable du mode, puis le calcul de la fréquence correspondante. La méthode de Holzer procède dans l'ordre inverse : la fréquence est ajustée successivement à partir d'une hypothèse initiale jusqu'à l'obtention de la fréquence vraie ; la forme du mode est calculée simultanément. La méthode de Holzer convient le mieux à l'étude de structures reposant le long d'un axe.

Un exemple concret et simple sera le bâtiment représenté en Figure IV.8. On suppose que les dalles des planchers sont rigides : la flèche latérale provient donc de la flexion des colonnes seulement et aucune rotation ne se produit aux nœuds. Dans ce cas la rigidité d'un étage (force nécessaire pour provoquer un déplacement relatif unité entre les planchers) au niveau i est :

$$k_i = \left(\frac{12EI}{h^3} \right)_i \quad (\text{IV.58})$$

Ce type de système est caractérisé par le fait que l'incrément de déplacement dans tout étage i ne dépend que de l'effort tranchant total T_i à ce niveau ; en vibrations libres l'incrément d'effort tranchant à tout niveau ne dépend que de la flèche totale à ce niveau en raison de la proportionnalité des forces d'inertie et des déplacements. Cette propriété rend possible le calcul des forces et des déplacements dans la structure entière de manière progressive en partant d'une extrémité, à condition qu'une hypothèse soit faite sur la fréquence de vibration et sur la condition limite inconnue à l'extrémité de départ. Donc l'effort tranchant d'un étage au niveau i est :

$$T_i = \sum_{k=1}^n F_{ik} = \sum_{k=1}^n \omega^2 m_k x_k \quad (\text{IV.59})$$

La rigidité d'un étage au niveau i peut s'écrire en fonction de l'effort tranchant :

$$T_i = k_i \Delta x_i = k_i (x_i - x_{i-1}) \quad (\text{IV.60})$$

Où :

T_i : effort tranchant au niveau i ,

Δx_i : déformation au niveau i .