



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique Et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche scientifique
معهد العلوم
Institut des sciences



Département de génie civil

Polycopié Pédagogique

Dynamique des Structures 1 et 2

Cours destiné aux étudiants de :

1^{ère} année Master « LMD » en Génie Civil, spécialité Structures

Elaboré par:

Dr. Nadhir TOUBAL SEGHIR

Année Universitaire : 2024/2025

Table des matières

Introduction générale	1
I. Introduction et généralistes	2
I.1 Introduction	2
I.2 Définition	2
I.3 Objectif fondamental de la DDS	2
I.4 Charge dynamiques	3
I.4.1 Approche déterministe	3
I.4.2 Approche aléatoire	3
I.5 Types de sollicitation	3
I.5.1 Chargements périodiques	3
I.5.2 Chargements apériodiques	4
I.6 Différences entre problème dynamique et statique	4
I.7 Méthodes de discrétisation	6
I.7.1 Concentration de masses	6
I.7.2 Déplacements généralisés	7
I.7.3 Méthode des éléments finis	8
I.8 Formulation des équations du mouvement	9
I.8.1 Principe de d'Alembert (équilibre dynamique direct)	10
I.8.2 Principe des travaux virtuels	10
I.8.3 Principe de Hamilton	11
I.9 Principales sources de vibrations	12
I.9.1 Classification des vibrations	12
I.9.2 Causes des vibrations	13
I.10 Théorie élémentaire des vibrations	14
I.11 Coefficient de rigidité k de la structure	15
I.11.1 Rigidité équivalente d'un système	16
I.12 Conclusion	17
II. Oscillations libres à un seul degré de liberté	19
II.1 Introduction	19
II.2 Définition	19
II.3 Formulation de l'équation du mouvement	20
II.4 Résolution de l'équation du mouvement	20
II.4.1 Vibration libre	20
II.4.2 Vibration forcée	26
II.4.3 Réponse du mouvement d'un support :	33
II.4.4 Isolation vibratoire	35

II.5	Excitation périodiques spéciales et générales	39
II.5.1	Réponse d'un système à un degré de liberté à une excitation périodique.....	39
II.5.2	Réponse à un chargement impulsive :.....	41
II.5.3	Spectre de réponse ou spectre de choc.....	45
II.5.4	Réponse à une excitation dynamique quelconque	47
II.5.5	Spectre de réponse sismique	51
II.6	Conclusion	54
III.	Systèmes à plusieurs degrés de liberté.....	55
III.1	Introduction	55
III.2	Equation de l'équilibre dynamique.....	56
III.3	Conclusion	62
IV.	Vibrations libres des S.P.D.D.L.....	63
IV.1	Introduction	63
IV.2	Analyse qualitative des vibrations libres des SPDDL.....	63
IV.3	Analyse modale :.....	67
IV.3.1	Evaluation du fréquences propres et modes propres du système non amortie	68
IV.3.2	Orthogonalités des modes	76
IV.4	Evaluation du mode de vibration	77
IV.4.1	Méthode de Rayleigh	77
IV.4.2	Méthode de Stodola :	79
IV.4.3	Méthode de Holzer.....	84
IV.5	Conclusion	87
V.	Vibrations forcées des S.P.D.D. L	88
V.1	Introduction	88
V.2	Analyse dynamique des systèmes à plusieurs DDL par la méthode de la superposition modale	88
V.2.1	Vibrations forcées non amorties	89
V.2.2	Vibrations forcées amorties	91
V.3	Méthode de superposition modale	93
V.3.1	Vibrations du support.....	93
V.3.2	Décomposition modale	94
V.4	Méthode dynamique modale spectrale.....	97
V.4.1	Réponse modale spectrale	97
V.4.2	Choix du nombre de modes	98
V.4.3	Spectre de réponse élastique	99
V.4.4	Méthode dynamique modale spectrale suivant le Règlement Parasismique Algérienne (RPA99 version 2003)	100
V.5	Méthode statique équivalente.....	110
V.5.1	Principe de la méthode	110

V.5.2	Conditions d'application de la méthode.....	110
V.5.3	Modélisation.....	111
V.5.4	Calcul de la force sismique totale	111
V.5.5	Estimation de la période fondamentale de la structure	113
V.5.6	Distribution de la résultante des forces sismiques	114
V.6	Conclusion	115
VI.	Méthode de la poussée progressive (Pushover).....	116
VI.1	Introduction	116
VI.2	Source de non linéarité.....	117
VI.3	Principe de l'analyse Pushover :	118
VI.4	Courbe de Pushover	118
VI.5	Courbe de capacité :	118
VI.6	Loi de comportement	122
VI.7	Point de performance	123
VI.8	Conclusion	124
	Conclusion générale.....	125
	Bibliographie.....	126

Liste des figures

Figure I-1. Mouvement harmonique simple.	3
Figure I-2. Mouvement périodique.	4
Figure I-3. Chargement aperiodique.	4
Figure I-4. Distinction fondamentale entre une charge statique et une charge dynamique.	5
Figure I-5. Idéalisations d'une poutre simple par concentration de la masse.	6
Figure I-6. Nombre de degré de liberté.	7
Figure I-7. Représentation de la déformée d'une poutre simple en série de Fourier.	7
Figure I-8. Coordonnées typiques d'une représentation de poutre par éléments finis. ...	9
Figure I-9. Système à un seul degré de liberté.	10
Figure I-10. Vibration harmonique.	12
Figure I-11. Vibration périodique.	12
Figure I-12. Vibration décroissante.	13
Figure I-13. Vibration croissante.	13
Figure I-14. Vibration quelconque.	13
Figure I-15. Représentation de la variation des trois grandeurs fondamentales du mouvement harmonique.	15
Figure I-16. Rigidité équivalente des systèmes en série et en parallèle.	17
Figure II-1. Oscillateur à un seul degré de liberté soumis à une force variable dans le temps.	19
Figure II-2. Spectre de réponse en vibration libre d'un système non amorti (a), et représentation de la rotation des vecteurs de vibration libre non amortie (b).	22
Figure II-3. Cercle d'amortissement représentant la relation entre le rapport de fréquence et le rapport d'amortissement.	23
Figure II-4. Spectre de réponse en vibration libre d'un système à amortissement sous critique.	23
Figure II-5. Spectre de réponse en vibration libre d'un système à amortissement critique.	24
Figure II-6. Spectre de réponse en vibration libre d'un système à amortissement critique et surcritique.	25
Figure II-7. Facteur d'amplification dynamique.	30
Figure II-8. Phase de la réponse stationnaire.	31
Figure II-9. Oscillateur à un seul degré de liberté avec un mouvement du support. ...	33
Figure II-10. Oscillateur à un seul degré de liberté avec un mouvement du support. .	35
Figure II-11. La relation entre le rapport de fréquence et de transmissibilité.	36
Figure II-12. Support vibrant.	36
Figure II-13. Véhicule se déplace sur un pont inégal à une vitesse constante.	38
Figure II-14. Chargement périodique arbitraire.	39
Figure II-15. Système non amorti à une excitation périodique.	39
Figure II-16. Chargement impulsif quelconque.	41
Figure II-17. Impulsion rectangulaire.	42
Figure II-18. Relation entre le facteur d'amplification dynamique et le rapport $\frac{t_1}{T}$ de l'impulsion rectangulaire.	43
Figure II-19. Impulsion triangulaire décroissante.	44
Figure II-20. Impulsion en forme sinusoïdale.	45
Figure II-21. Spectres de déplacement-réponse (spectres de choc) pour trois types d'impulsions.	46
Figure II-22. Bâtiment soumis à une explosion triangulaire.	46
Figure II-23. Principe d'obtention de l'intégrale de Duhamel (système non amorti).	48

Figure II-24. Chargement impulsive de courte durée.	49
Figure II-25. Mouvement de support.	50
Figure II-26. Spectres de réponse pour le séisme d'El Centro, en Californie, 18 mai 1940 ; $\xi = 0,2,5,10$, and 20%.....	53
Figure III-1. Idéalisations d'une poutre simple par concentration de la masse.	55
Figure III-2. Modélisation d'un bâtiment à n étage en masses concentrées.....	56
Figure III-3. Structure à 4 étages.	59
Figure III-4. Structure à 4 étages (a), modélisation brochette (b).....	59
Figure III-5. Modélisation brochette de la structure (a), coefficient d'influence de rigidité.	60
Figure III-6. Modélisation brochette de la structure (a), coefficient d'influence de flexibilité.	61
Figure III-7. Forces agissantes.	61
Figure IV-1. Vibration libre d'un système non amorti due à un déplacement initial arbitraire : (a) structure à un seul étage ; (2) l'historique des déplacements.	63
Figure IV-2. Vibration libre d'un système non amorti due à un déplacement initial arbitraire : (a) structure à deux étages; (b) des formes de déflexions aux instants a, b et c; (c) coordonnées modales $q_n(t)$; (d) l'historique des déplacements.....	64
Figure IV-3. Vibration libre d'un système non amorti du premier forme de vibration : (a) structure à deux étages ; (b) des formes de déflexions aux instants a, b, c, d et e; (c) coordonnées modales $q_n(t)$; (d) l'historique des déplacements.	65
Figure IV-4. Vibration libre d'un système non amorti de la deuxième forme de vibration : (a) structure à deux étages; (b) des formes de déflexions aux instants a, b, c, d et e; (c) coordonnées modales $q_n(t)$; (d) l'historique des déplacements.	66
Figure IV-5. Modes propres.....	69
Figure IV-6. Etude des vibrations : (a) définition de la structure ; (b) coefficients d'influence de rigidité.....	71
Figure IV-7. Modes de vibration de la structure en Figure IV.6.	75
Figure IV-8. Détermination de fréquence fondamentale d'un système à 3DDL par la méthode de Rayleigh.....	78
Figure IV-9. Méthode de Holzer pour un bâtiment : (a) structure donnée, (b) forces et déplacements en un étage.....	85
Figure V-1. Oscillateur simple à un seul DDL.	90
Figure V-2. Limites du spectre de réponse : (a) structure infiniment rigide, (b) structure infiniment souple.	100
Figure V-3. Exemple de spectre de réponse en fonction du Site 1 ; Zone 1 ; Groupe A1 ; Béton armé léger ; Portiques autostables sans remplissages en maçonnerie rigide).....	102
Figure V-4. Exemple de conception de spectre de réponse suivant le RPA99 V2003.	102
Figure V-5. Carte de zonage sismique de l'Algérie.	103
Figure V-6. Facteur d'amplification dynamique moyen $D \xi = 5$	112
Figure VI-1. Définition des paramètres α_1 et α_u dans l'analyse Pushover.	117
Figure VI-2. Courbe de Pushover.	118
Figure VI-3. Transformation de la courbe de Pushover en courbe de capacité.	121
Figure VI-4. Courbe moment-courbure d'une section droite.	122
Figure VI-5. L'effort tranchant à la base.	122
Figure VI-6. Courbe de Pushover d'une structure donnée.	123
Figure VI-7. Détermination du point de performance.	124

Liste des tableaux

Tableau I-1. Différences entre problème dynamique et statique.	5
Tableau I-2. Comparaison des approches de formulation.	11
Tableau I-3. Rigidité des poutres soumises à différentes charges.	16
Tableau V-1. Classification des ouvrages selon leur importance.	104
Tableau V-2. Coefficient d'accélération de zone.	105
Tableau V-3. Valeurs de $\xi\%$	105
Tableau V-4. Valeurs du coefficient de comportement R.	105
Tableau V-5. Valeurs de T_1 et T_2	107
Tableau V-6. Valeurs des pénalités P_q	107
Tableau V-7. Valeurs du coefficient de pondération β	113
Tableau V-8. Valeurs du coefficient C_T	113

Avant-propos

La dynamique des structures constitue une discipline fondamentale de l'ingénierie civile, visant à comprendre et à modéliser le comportement des ouvrages soumis à des sollicitations dynamiques. Ces sollicitations, engendrées par des phénomènes tels que les séismes, le vent, les explosions ou les vibrations mécaniques, peuvent induire des effets complexes et parfois destructeurs sur les structures, nécessitant une approche spécifique en termes d'analyse et de dimensionnement.

Le présent document, intitulé « *Dynamique des Structures 1 et 2* », constitue un support pédagogique destiné aux étudiants de première année Master « LMD » en Génie Civil, spécialité Structures. Il a pour objectif de leur fournir les outils conceptuels et pratiques nécessaires pour analyser la réponse dynamique des structures, en s'appuyant à la fois sur les bases théoriques de la mécanique vibratoire et sur les méthodes d'analyse modernes utilisées en ingénierie.

Le cours est organisé de manière progressive, permettant d'aborder successivement les systèmes à un et plusieurs degrés de liberté, les différentes formes d'excitation dynamique, ainsi que les méthodes analytiques et numériques de résolution. Une attention particulière est portée aux applications en génie parasismique à travers l'étude de la réponse sismique des structures selon les méthodes réglementaires (statique équivalente, modale spectrale) ainsi que l'introduction à l'analyse non linéaire par la méthode de la poussée progressive (Pushover). Chaque chapitre combine rigueur scientifique, clarté pédagogique et pertinence technique pour favoriser l'assimilation des concepts et leur application dans des cas concrets.

Ce cours ambitionne de former des ingénieurs capables de concevoir des structures sûres, performantes et durables face aux actions dynamiques. En intégrant les avancées scientifiques, les référentiels normatifs et les outils de modélisation contemporains, il prépare les étudiants à relever les défis techniques liés à la sécurité et à la résilience des infrastructures. À l'issue de cette formation, les futurs professionnels seront en mesure d'aborder les problématiques dynamiques avec méthode, compétence et responsabilité, au service d'un génie civil moderne et adapté aux enjeux actuels.

Introduction générale

L'ingénierie des structures doit faire face à des sollicitations de plus en plus complexes, notamment celles induites par des actions dynamiques telles que les séismes, le vent, les vibrations de machines ou encore les charges d'impact. Ces actions engendrent des réponses transitoires ou vibratoires dans les structures, nécessitant une approche différente de celle adoptée en statique classique. La dynamique des structures permet d'appréhender ces phénomènes en tenant compte du temps, de l'inertie et de l'amortissement, éléments absents des analyses statiques conventionnelles.

Ce polycopié intitulé *Dynamique des Structures 1 et 2* a pour vocation de présenter aux étudiants de première année Master en Génie Civil (spécialité Structures) les bases scientifiques et techniques indispensables à la compréhension et à la maîtrise du comportement dynamique des structures. Il est structuré de manière progressive, en commençant par la modélisation des systèmes à un degré de liberté (SDDL), puis ceux à plusieurs degrés de liberté (SPDDL), pour aboutir à des méthodes avancées d'analyse sismique, conformément aux normes et aux recommandations parasismiques en vigueur.

La première partie du cours traite des concepts fondamentaux, des équations du mouvement, des types de sollicitations, des propriétés dynamiques et des réponses vibratoires. Elle introduit aussi la notion de résonance, les effets d'amortissement, les diagrammes spectraux et les méthodes de résolution analytique et numérique. La deuxième partie se concentre sur les applications en génie parasismique, notamment à travers les méthodes de calcul de la force sismique, l'analyse modale spectrale et l'analyse statique non linéaire dite méthode de la poussée progressive (Pushover).

À travers ce contenu, le cours vise à former des ingénieurs capables de concevoir des structures performantes face aux actions dynamiques, tout en tenant compte des exigences de sécurité, de confort et de durabilité. L'intégration des outils analytiques et numériques modernes, combinée à une compréhension fine des mécanismes vibratoires, offre aux étudiants une compétence essentielle pour l'analyse et la conception structurale dans un contexte réel, souvent régi par des contraintes réglementaires strictes.

I. Introduction et généralistes

I.1 Introduction

La dynamique des structures est une branche fondamentale de la mécanique des structures, qui s'intéresse à l'étude du comportement des ouvrages soumis à des sollicitations variables dans le temps. Contrairement à l'analyse statique, qui néglige les effets de l'inertie et de l'amortissement, l'analyse dynamique permet de comprendre et de prévoir les réactions des structures face à des actions telles que les séismes, les explosions, les impacts ou encore les charges cycliques.

Ce chapitre introductif a pour objectif de familiariser l'étudiant avec les notions de base indispensables à l'analyse dynamique. Il présente les principes fondamentaux, les différences clés entre les approches statiques et dynamiques, les types d'actions dynamiques couramment rencontrées, ainsi que les premiers outils de modélisation et de résolution utilisés pour décrire le comportement des structures soumises à ces sollicitations. Cette base théorique constitue le socle sur lequel s'appuieront les chapitres suivants consacrés à l'étude détaillée des systèmes à un ou plusieurs degrés de liberté et aux méthodes d'analyse modernes.

I.2 Définition

La dynamique des structures (DDS) est une branche de la mécanique des structures qui étudie le comportement des structures soumises à des charges variables dans le temps.

I.3 Objectif fondamental de la DDS

L'objectif principal de la dynamique des structures est de développer des méthodes permettant d'analyser les contraintes et les déplacements induits dans une structure soumise à un chargement dynamique quelconque (par exemple, une force horizontale). En d'autres termes, elle permet de dimensionner une structure lorsqu'on lui applique un chargement dynamique.

Remarque :

La distinction entre analyse statique et dynamique est importante. Il serait utile d'explicitier ici que l'analyse statique est un cas particulier de l'analyse dynamique lorsque les variations temporelles sont nulles ou négligeables.

I.4 Charge dynamiques

Au cours de leur durée de vie, presque toutes les structures sont soumises à des charges dynamiques. Deux approches fondamentales permettent d'analyser leur réponse :

I.4.1 Approche déterministe

Cette approche est utilisée lorsque l'évolution temporelle du chargement est parfaitement connue (amplitude, direction, durée d'action, etc.). Elle inclut les charges périodiques et apériodiques.

I.4.2 Approche aléatoire

Cette approche est utilisée lorsque le chargement n'est pas connu de manière précise. Dans ce cas, les caractéristiques statistiques de la réponse sont déterminées (valeur moyenne, écart type, spectre, etc.). Parmi les actions dynamiques aléatoires, on peut citer les séismes futurs, les actions dues au vent, les charges dynamiques dues aux déplacements des personnes sur les tribunes ou les pistes.

I.5 Types de sollicitation

D'un point de vue analytique, on peut classer les chargements de type déterministe en deux grandes catégories:

I.5.1 Chargements périodiques

Un chargement est dit périodique si sa variation dans le temps se répète de manière identique à chaque cycle. Le cas le plus simple est la charge sinusoïdale qu'on appelle **harmonique simple**. Ce type de sollicitation est fréquent dans les machines tournantes déséquilibrées (effets de balourd).

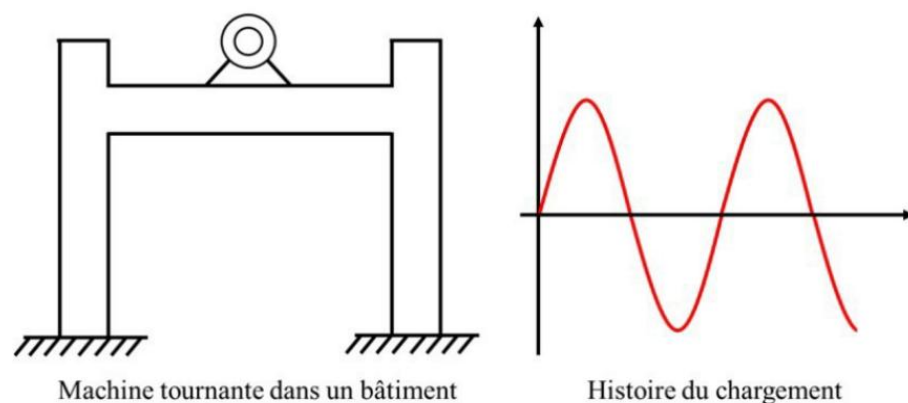


Figure I-1. Mouvement harmonique simple.

Les autres formes de chargements périodiques, par exemple ceux qui proviennent des pressions hydrodynamiques engendrées par l'hélice à l'arrière d'un navire ou des effets d'inertie des machines alternatives, sont souvent plus complexes.

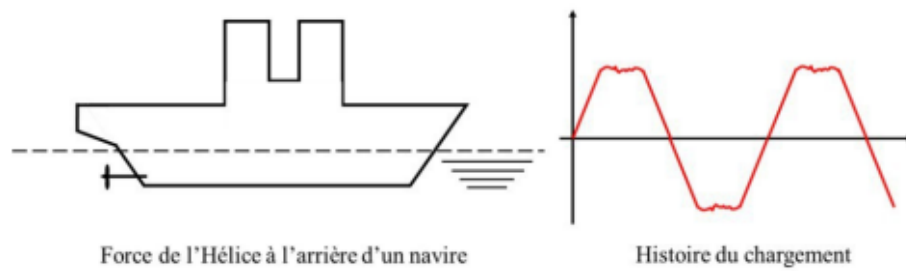


Figure I-2. Mouvement périodique.

I.5.2 Chargements apériodiques

Ces sollicitations sont des impulsions de très courte durée, ou des chargements de longue durée et de forme quelconque, comme les chocs ou explosions, qui sont des sources courantes de chargements impulsifs.

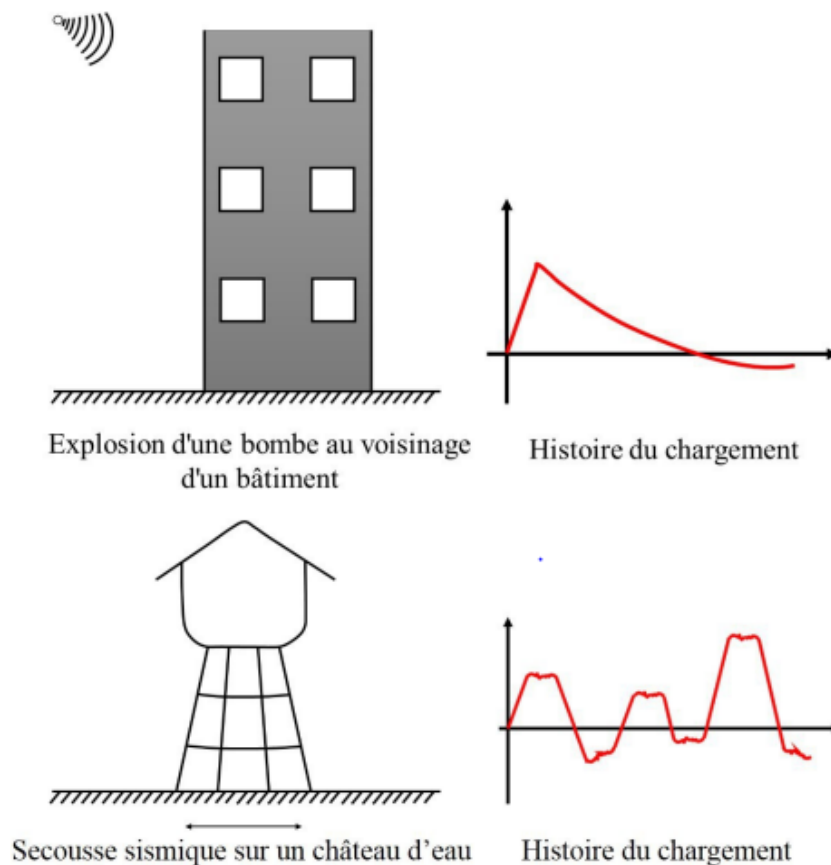


Figure I-3. Chargement apériodique.

I.6 Différences entre problème dynamique et statique

Un problème de dynamique des structures se distingue du problème statique correspondant par deux caractéristiques fondamentales :

- Le caractère évolutif du problème dans le temps ;
- La prise en compte des forces d'inertie.

Étant donné que la charge et la réponse varient au cours du temps, un problème dynamique ne possède généralement pas une solution unique, ce qui le différencie d'un problème statique.

Une charge statique est définie comme une charge dont l'amplitude, la direction et le point d'application restent constants dans le temps ; dans ce cas, les effets d'inertie sont négligés.

En revanche, une charge dynamique est une charge dont l'amplitude, la direction et le point d'application varient dans le temps, ce qui génère des effets d'inertie significatifs.

L'objectif principal de la dynamique des structures est de déterminer l'évolution temporelle des contraintes et des déplacements induits par un chargement dynamique quelconque.

Dans ce cadre, l'analyse statique peut être considérée comme un cas particulier de l'analyse dynamique, correspondant à une situation où les effets d'inertie sont absents ou négligeables.

Tableau I-1. Différences entre problème dynamique et statique.

Critère	Statique	Dynamique
Variation temporelle	Inexistante (constante dans le temps)	Oui, fonction du temps
Forces d'inertie	Ignorées	Prises en compte (proportionnelles à l'accélération)
Solution	Unique	Dépend du temps : solution continue

Exemple :

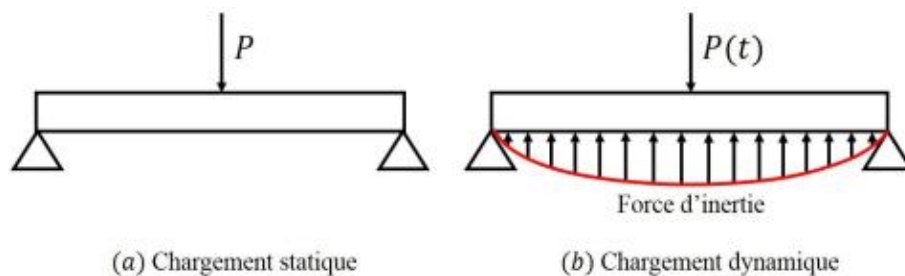


Figure I-4. Distinction fondamentale entre une charge statique et une charge dynamique.

Les principes d'équilibre des forces doivent être correctement établis en fonction des charges appliquées, qu'elles soient constantes p ou variables dans le temps $p(t)$. Selon la Figure I-4.a (charge statique), la solution en tout point de la structure est unique et constante dans le temps.

En revanche, selon la Figure I-4.b (charge dynamique), la solution correspond à une succession d'états définis à chaque instant pertinent de l'évolution de la réponse. Dans ce cas, la détermination des efforts dépend non seulement de la charge $p(t)$, mais aussi des déplacements dynamiques $x(t)$, associés à des accélérations qui génèrent des forces d'inertie s'opposant à ces mêmes accélérations. La détermination précise de ces forces d'inertie dépend de la méthode de discrétisation adoptée dans le modèle mathématique utilisé pour représenter la structure.

I.7 Méthodes de discrétisation

Pour résoudre un problème dynamique, il est nécessaire de modéliser la structure de manière adaptée. La poutre représentée dans la Figure I.4.b possède théoriquement un nombre infini de degrés de liberté, en raison de la continuité de la matière et de la possibilité de mouvement en chaque point. Pour rendre l'analyse possible, il convient de réduire ce nombre en appliquant une méthode de discrétisation. Trois approches principales permettent cette réduction :

- La concentration de masses ;
- Les déplacements généralisés ;
- La méthode des éléments finis.

I.7.1 Concentration de masses

Le nombre de composantes de déplacement à considérer pour représenter les effets de toutes les forces d'inertie agissant dans une structure est appelé **nombre de degrés de liberté dynamiques (D.D.L.D)**.

Par exemple, si les déplacements dans le système illustré à la Figure I-5 sont contraints de telle sorte que les trois points massiques ne peuvent se déplacer que verticalement, il s'agit alors d'un **système à trois degrés de liberté**.

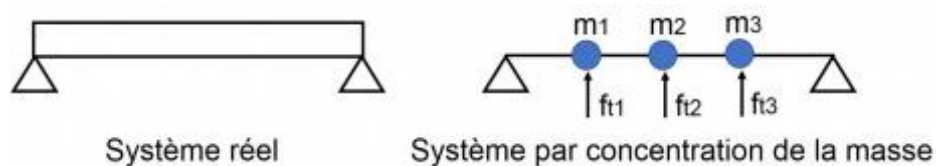


Figure I-5. Idéalisisation d'une poutre simple par concentration de la masse.

L'**idéalisisation par concentration des masses** constitue une méthode simple et efficace pour réduire le nombre de degrés de liberté nécessaires dans l'étude des problèmes dynamiques. Elle est particulièrement pertinente lorsque la masse de la structure est essentiellement concentrée en un nombre limité de points. Cette approche permet alors une modélisation simplifiée sans compromettre significativement la précision des résultats, notamment dans les cas où la déformation de la structure est négligeable.

Exemple :

Pour un solide indéformable en mouvement dans l'espace, le nombre de degrés de liberté correspond au **nombre minimal de coordonnées** nécessaires pour définir la position de chaque particule de masse du système. Ce nombre permet ainsi de caractériser entièrement l'état cinématique du système.

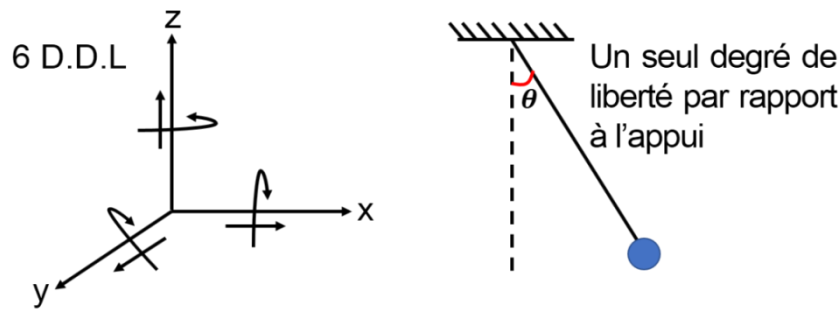


Figure I-6. Nombre de degré de liberté.

I.7.2 Déplacements généralisés

Dans certains cas, notamment lorsque la masse du système est répartie de manière presque uniforme sur l'ensemble de la structure, il peut être préférable d'adopter une méthode différente pour réduire le nombre de degrés de liberté. Cette approche repose sur l'hypothèse que la **déformée** — c'est-à-dire la forme adoptée par la structure après déplacement — peut être représentée comme une **combinaison linéaire de certains motifs de déplacement**. Cette hypothèse permet ainsi de limiter efficacement le nombre de degrés de liberté à prendre en compte.

Un exemple classique est la représentation de la déformée d'une poutre simple à l'aide d'une **série trigonométrique** (série de Fourier). Cette déformée peut s'exprimer comme la somme de composantes sinusoïdales indépendantes, selon l'expression :

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (\text{I. 1})$$

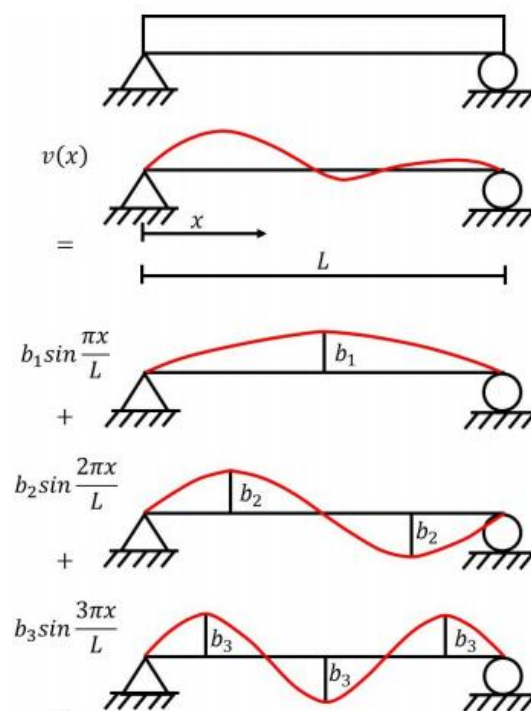


Figure I-7. Représentation de la déformée d'une poutre simple en série de Fourier.

Comme illustré à la Figure I-7, cette modélisation permet de décrire la déformée à l'aide de fonctions sinusoïdales compatibles avec les conditions géométriques imposées par les appuis. Contrairement à la méthode de **concentration des masses**, où la masse est localisée en quelques points, cette approche exprime la réponse de la structure à travers des **fonctions de déplacement** qui traduisent la répartition continue de la masse.

Les coefficients b_n sont appelés **coordonnées généralisées** et représentent les amplitudes relatives de chaque composante de déplacement. Le nombre infini de degrés de liberté de la poutre réelle est ainsi remplacé par une **série de composantes**, que l'on peut tronquer pour obtenir une approximation efficace.

Dans une approche pratique, on peut limiter cette série à quelques termes (par exemple trois), ce qui permet de conserver une **bonne précision tout en assurant la continuité des déplacements internes**. L'expression généralisée des déplacements pour toute structure unidimensionnelle peut donc être formulée comme suit :

$$v(x) = \sum_n z_n \psi_n(x) \quad (I.2)$$

Où :

- $\psi_n(x)$ est la **fonction de déplacement** (ou mode de forme) ;
- z_n est la **coordonnée généralisée** associée à chaque fonction.

Cette méthode permet, pour un même nombre de degrés de liberté, d'obtenir **une meilleure précision** que la méthode de concentration des masses. Toutefois, elle présente l'inconvénient d'une **complexité numérique accrue**, notamment en ce qui concerne le **couplage des forces d'inertie** avec les degrés de liberté retenus dans le modèle.

I.7.3 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis représente la **troisième approche de discrétisation** dans l'analyse dynamique des structures. Elle combine certaines caractéristiques des deux méthodes précédentes — la concentration des masses et les coordonnées généralisées — et constitue aujourd'hui l'une des techniques les plus largement utilisées en ingénierie.

Cette méthode repose sur l'**idéalisation de la structure** en un ensemble fini d'éléments, chacun représentant une portion de la structure initiale. Par exemple, la poutre illustrée dans la **Figure I-8** est divisée en plusieurs segments appelés **éléments finis**. Les extrémités de ces éléments sont appelées **nœuds** (ou points nodaux), et les **déplacements de ces nœuds** sont choisis comme **coordonnées généralisées** du système.

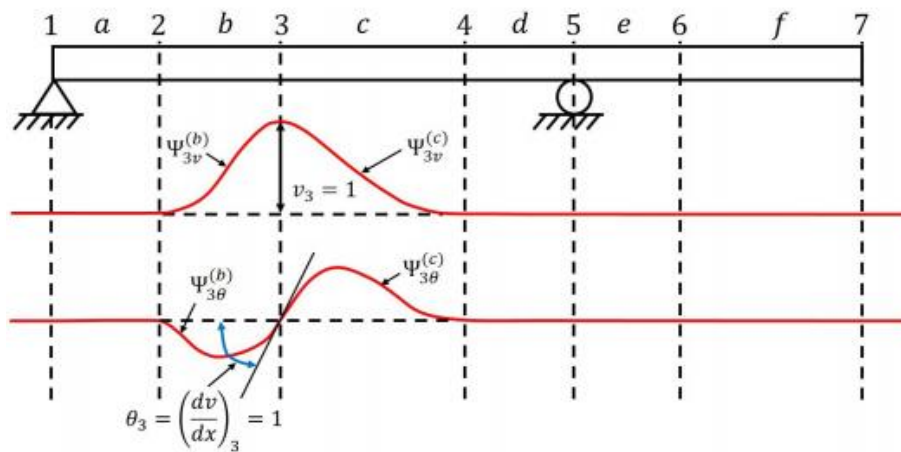


Figure I-8. Coordonnées typiques d'une représentation de poutre par éléments finis.

Les déplacements de tout point situé à l'intérieur de chaque élément sont alors **interpolés** à partir des déplacements nodaux à l'aide de fonctions dites **fonctions d'interpolation**. Ces fonctions permettent de reconstituer la déformée de la structure complète à partir des seuls déplacements des nœuds, selon l'expression (I.2):

$$v(x) = \sum_n z_n \psi_n(x)$$

Où :

- z_n représente les **coordonnées généralisées** associées aux nœuds ;
- $\psi_n(x)$ est la **fonction d'interpolation** correspondant à chaque degré de liberté nodal.

Ces fonctions sont choisies de manière à satisfaire à la fois les conditions de compatibilité entre éléments et les conditions aux limites de la structure.

En résumé, la **méthode des éléments finis** constitue l'approche la plus performante pour modéliser les **déplacements de structures de géométrie arbitraire** à l'aide d'un **ensemble discret de degrés de liberté**. Sa flexibilité, sa précision et sa capacité à traiter des configurations complexes en font un outil fondamental dans le domaine de la dynamique des structures.

I.8 Formulation des équations du mouvement

L'étude dynamique déterministe d'une structure vise principalement à déterminer l'évolution temporelle de ses **déplacements** sous l'effet d'un **chargement extérieur variable dans le temps**. Une fois les déplacements connus, il est alors possible de calculer les **déformations** et les **contraintes** en tout point de la structure.

Trois approches principales permettent de formuler les équations du mouvement d'un système vibratoire :

- Le **principe de d'Alembert** (équilibre dynamique direct),
- Le **principe des travaux virtuels**,
- Le **principe de Hamilton**.

Chaque méthode présente des avantages spécifiques selon le type de problème considéré.

I.8.1 Principe de d'Alembert (équilibre dynamique direct)

Ce principe découle directement de la **seconde loi de Newton**, selon laquelle la variation de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces appliquées à une masse m :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}(t) = m \frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x}(t) \quad (I.3)$$

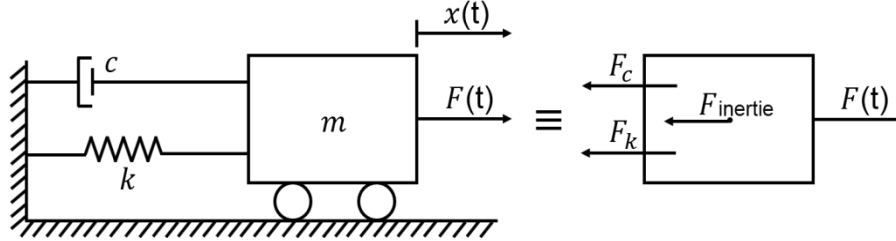


Figure I-9. Système à un seul degré de liberté.

Dans le cas d'un **système à un seul degré de liberté** (Figure I-9), les forces agissantes sont :

- la force élastique $\vec{F}_k = k \vec{x}$,
- la force d'amortissement $\vec{F}_c = c \vec{\dot{x}}$,
- la force extérieure appliquée $F(t)$.

Ainsi, selon le **principe de d'Alembert**, l'équation du mouvement s'écrit :

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + c\dot{x}(t) = F(t) \quad (I.4)$$

Cette équation différentielle linéaire gouverne le mouvement dynamique du système.

I.8.2 Principe des travaux virtuels

Ce principe repose sur l'idée que, pour un déplacement **virtuel** δx , compatible avec les conditions géométriques (liaisons) du système, le **travail total des forces** doit être nul :

$$-\delta W_i - \delta W_c - \delta W_k + \delta W_{ext} = 0 \quad (I.5)$$

Ce qui donne :

$$F(t)\delta x - F_i\delta x - F_c\delta x - F_k\delta x = 0 \rightarrow F(t)\delta x - m\ddot{x}\delta x - c\dot{x}\delta x - kx\delta x = 0 \quad (I.5.a)$$

Ou, en regroupant les termes :

$$(m\ddot{x} + c\dot{x} + kx)\delta x = F(t)\delta x \quad (I.5.b)$$

Puisque δx est arbitraire, l'équation du mouvement retrouvée est identique :

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + c\dot{x}(t) = F(t) \quad (I.5.c)$$

Avantage : cette méthode ne fait intervenir que des **grandeurs scalaires**, ce qui facilite l'analyse dans certains cas complexes.

I.8.3 Principe de Hamilton

Le **principe de Hamilton** est le plus général des trois. Il repose sur l'équilibre énergétique global du système, formulé par l'annulation de la variation de l'action :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (\text{I. 6})$$

Où :

- T : énergie cinétique totale,
- V : énergie potentielle (élastique + forces conservatives),
- W_{nc} : travail des forces non conservatrices (amortissement et charges externes arbitraires),
- δ : variation virtuelle.

Pour un système à un degré de liberté :

- $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$,
- $V = \frac{1}{2} k x^2$,
- $\delta W_{nc} = F(t)\delta x - c\dot{x}\delta x$

L'application du principe donne :

$$\int_{t_1}^{t_2} [m\ddot{x}\delta x - c\dot{x}\delta x - kx\delta x + F(t)\delta x]dt = 0 \quad (\text{I. 6. a})$$

Puisque δx est arbitraire et nulle aux bornes, cela implique à nouveau :

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + c\dot{x}(t) = F(t) \quad (\text{I. 6. b})$$

Ce principe est aussi applicable en statique (si $T = 0$), où il conduit au **principe du minimum de l'énergie potentielle**.

Tableau I-2. Comparaison des approches de formulation.

Méthode	Nature des grandeurs	Avantages principaux	Inconvénients
Principe de d'Alembert	Vectorielle	Direct et intuitif, proche de la mécanique classique	Moins adapté aux systèmes complexes
Travaux virtuels	Scalaire	Simplicité d'expression, utile pour les systèmes avec liaisons	Moins général
Principe de Hamilton	Énergétique (scalaire)	Très général, s'applique à toutes les situations dynamiques/statique	Plus abstrait, formalisme complexe

I.9 Principales sources de vibrations

Les vibrations structurales peuvent être engendrées par diverses sollicitations dynamiques externes, susceptibles de provoquer des déformations indésirables, des dommages, voire des ruptures. Les principales sources incluent :

- **Les mouvements sismiques** (secousses du sol d'origine tectonique),
- **Les charges mobiles**, telles que les convois ferroviaires ou routiers circulant sur des ponts,
- **Les explosions**, causant des impulsions à haute énergie,
- **L'action du vent**, qui peut induire des effets aérodynamiques complexes, notamment des instabilités de type flottement (*flutter*).

I.9.1 Classification des vibrations

Les vibrations sont classées selon leurs caractéristiques temporelles, principalement l'évolution de l'amplitude au cours du temps :

- **Vibration harmonique** : Décrite par une fonction trigonométrique simple (souvent sinus ou cosinus), par exemple :

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

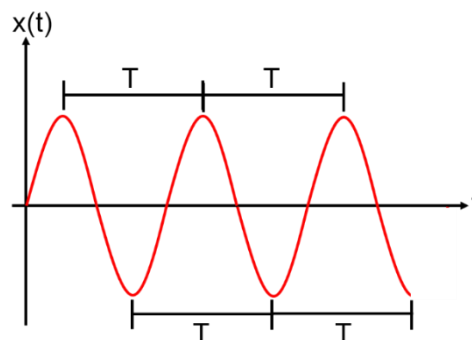


Figure I-10. Vibration harmonique.

- **Vibration périodique** : Répétition dans le temps avec une période définie T , sans nécessairement être harmonique.

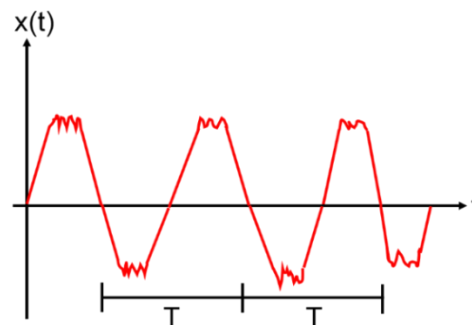


Figure I-11. Vibration périodique.

- **Vibration décroissante** : Amplitude qui diminue avec le temps, typique des systèmes amortis.

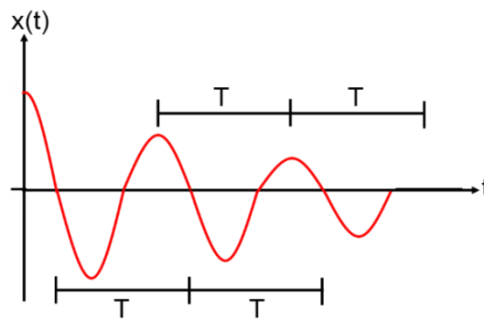


Figure I-12. Vibration décroissante.

- **Vibration croissante** : Amplitude qui augmente dans le temps, souvent en raison de résonance ou d'instabilités.

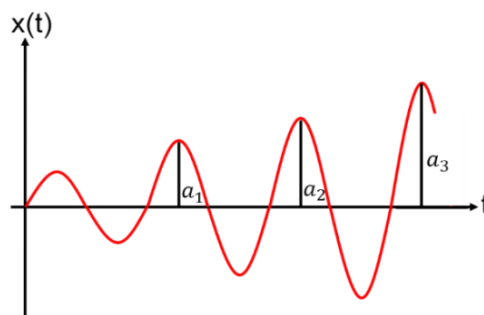


Figure I-13. Vibration croissante.

- **Vibration quelconque** : Superposition de plusieurs vibrations sinusoïdales, typiquement obtenue par décomposition de Fourier.

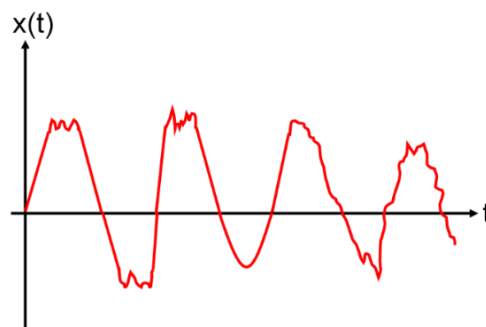


Figure I-14. Vibration quelconque.

I.9.2 Causes des vibrations

Les vibrations peuvent être classées selon leur origine ou la nature des sollicitations :

- **Selon la nature de l'excitation** :
 - **Vibration libre** : Survient après un choc ou une perturbation initiale sans excitation externe continue.
 - **Vibration forcée** : Provoquée par une force externe agissant de façon continue et indépendante des caractéristiques internes du système.

- **Vibration paramétrique** : Résulte de la variation périodique d'un paramètre du système (ex : raideur variable).
- **Vibration auto-excitée** : Générée par le système lui-même par rétroaction (cas fréquent en aéroélasticité).
- **Chocs répétés** : Série d'impulsions mécaniques brusques.
- **Selon la présence d'amortissement** :
 - **Vibration amortie** : L'énergie se dissipe au fil du temps par frottements ou viscosité.
 - **Vibration non amortie** : Aucune dissipation d'énergie n'est prise en compte, idéale en théorie.
- **Selon la relation force-déplacement** :
 - **Vibration linéaire** : La force est proportionnelle au déplacement (loi de Hooke).
 - **Vibration non linéaire** : La relation entre force et déplacement est non linéaire (effets géométriques ou matériaux).

I.10 Théorie élémentaire des vibrations

Dans le cas le plus simple d'un mouvement oscillatoire (vibration harmonique libre non amortie), le déplacement est donné par :

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{I. 7})$$

Où :

- $x(t)$: déplacement à l'instant t (élongation),
- x_0 : amplitude maximale,
- ω : pulsation (rad/s),
- φ : phase initiale (rad).

Les dérivées premières et secondes du déplacement donnent respectivement la vitesse et l'accélération :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = x_0 \omega \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{I. 7. a})$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{d\dot{x}(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -x_0 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{I. 7. b})$$

La **Période** T est le temps nécessaire pour effectuer un cycle complet :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{I. 8})$$

La **Fréquence** f , représentant le nombre de cycles par seconde, s'écrit :

$$f = \frac{1}{T} \quad (\text{I. 9})$$

La figure I-15 illustre la variation dans le temps des trois grandeurs fondamentales du mouvement harmonique : le déplacement $x(t)$, la vitesse $\dot{x}(t)$ et l'accélération $\ddot{x}(t)$.

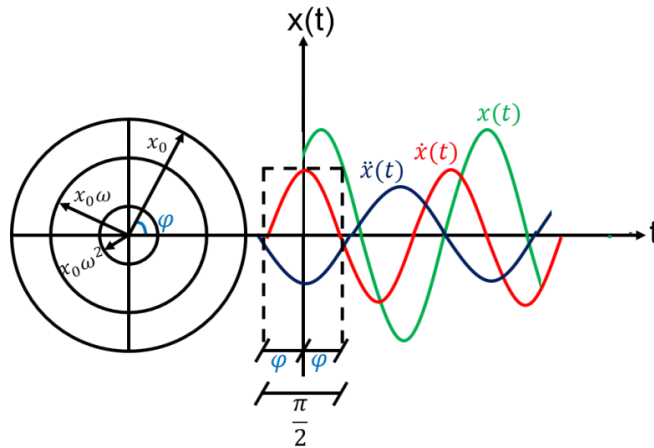


Figure I-15. Représentation de la variation des trois grandeurs fondamentales du mouvement harmonique.

I.11 Coefficient de rigidité k de la structure

La rigidité k , exprimée en newtons par mètre (N/m), représente la capacité d'une structure à résister à une déformation élastique sous l'effet d'une force appliquée. Plus une structure est rigide, plus la force nécessaire pour produire un déplacement donné est grande.

La rigidité d'un élément dépend :

- de ses **dimensions géométriques** (longueur, section, moment d'inertie, etc.),
- du **module d'élasticité** E du matériau qui le compose.

La rigidité exprime la relation de proportionnalité entre la force F appliquée en un point et le déplacement (déflexion) δ résultante en ce point :

$$k = \frac{F}{\delta} \quad (\text{I. 10})$$

Où :

- k est le coefficient de rigidité (N/m),
- F est la force appliquée (N),
- δ est le déplacement (ou déflexion) de la structure au point considéré (m).

Le déplacement δ peut être déterminé en utilisant l'équation de la déformée :

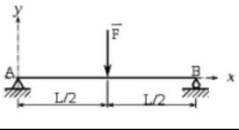
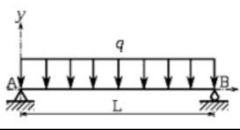
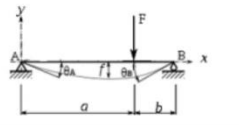
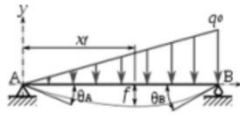
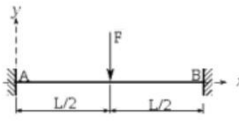
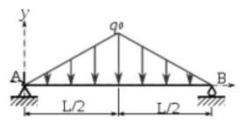
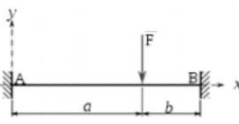
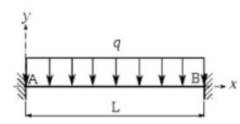
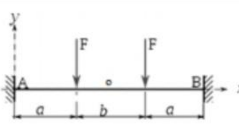
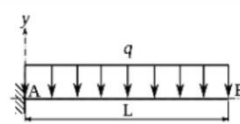
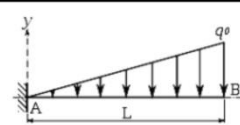
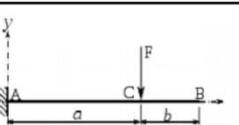
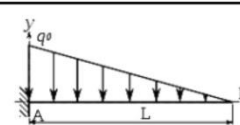
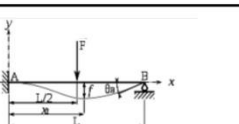
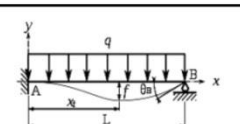
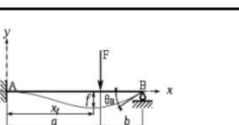
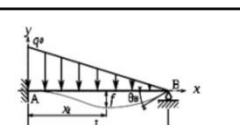
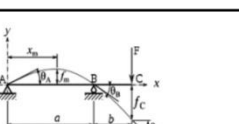
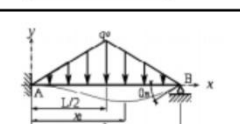
$$y'' = \frac{d^2\delta(x)}{dx^2} = -\frac{M_z(x)}{EI_z} \rightarrow y = \iint -\frac{M_z(x)}{EI_z} dx dx = \delta \quad (\text{I. 11})$$

Où :

- $M_z(x)$ est le moment fléchissant,
- E est le module d'élasticité,
- I_z est le moment d'inertie de la section.

Le **Tableau I-3** présente des valeurs typiques de rigidité pour diverses configurations de poutres soumises à différents types de chargement.

Tableau I-3. Rigidité des poutres soumises à différentes charges.

Système (cas où charge concentrée)	Rigidité k	Système (cas où charge répartie)	Rigidité k
	$k = \frac{48EI}{L^3}$		$k = \frac{384EI}{5L^4}$
	$k = \frac{3EI}{a^2b^2}$		$k = \frac{384EI}{0.00652L^4}$
	$k = \frac{192EI}{L^3}$		$k = \frac{120EI}{L^4}$
	$k = \frac{3EI}{a^3b^3}$		$k = \frac{384EI}{L^4}$
	$k = \frac{6EI}{a^3(2L-3a)}$		$k = \frac{8EI}{L^4}$
	$k = \frac{3EI}{L^3}$		$k = \frac{120EI}{11L^4}$
	$k = \frac{6EI}{(L-a)^2 \times (2L+a)}$		$k = \frac{30EI}{L^4}$
	$k = \frac{768EI}{7L^3}$		$k = \frac{185EI}{L^4}$
	$k = \frac{96EI}{b^3(3L^2-5b^2)}$		$k = \frac{EI}{0.00239L^4}$
	$k_c = \frac{3EI}{b^2(a+b)}$		$k = \frac{EI}{0.00357L^4}$

I.11.1 Rigidité équivalente d'un système

Lorsque plusieurs éléments structuraux participent à la résistance globale, il est nécessaire de déterminer une **rigidité équivalente** k_{eq} . Cette dernière dépend de la configuration du système (séries, parallèles) et de la distribution des charges.

La **Figure I-16** illustre la méthode de calcul de la rigidité équivalente dans un système simplifié.

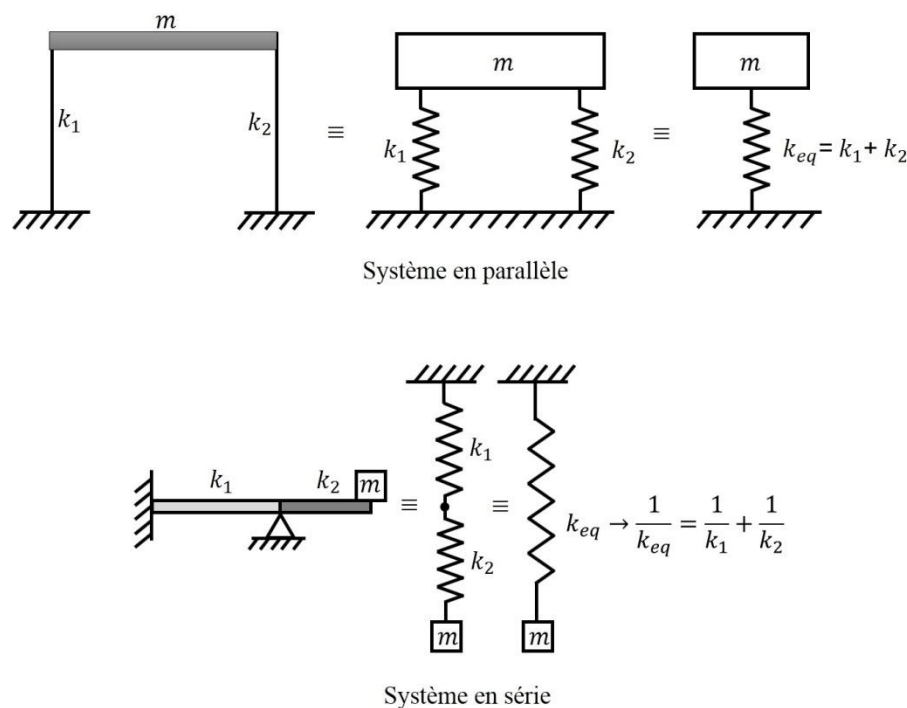


Figure I-16. Rigidité équivalente des système en série et en parallèle.

Système en parallèle : si deux ressort sont connectés de telle sorte que sous l'action de la force, leurs déplacement sont les mêmes et leurs forces sont différentes alors les ressorts sont en parallèles.

Système en série : si deux ressort sont connectés de telle sorte que sous l'action de la force, leurs déplacement sont différentes et leurs forces sont les mêmes alors les ressorts sont en série.

I.12 Conclusion

La dynamique des structures constitue une discipline essentielle pour comprendre et prévoir le comportement des ouvrages soumis à des sollicitations variables dans le temps. Contrairement à l'analyse statique, elle intègre les effets de l'inertie et de l'amortissement. Ce chapitre a introduit les notions de base en présentant les différents types de sollicitations dynamiques, leurs classifications et leurs sources.

Les distinctions entre les charges statiques et dynamiques ont été clairement définies, tout comme les méthodes de discrétisation nécessaires à la modélisation. Les trois approches principales de formulation des équations du mouvement – d'Alembert, travaux virtuels et Hamilton – ont été décrites en détail.

Une attention particulière a été portée à la classification des vibrations ainsi qu'aux paramètres physiques fondamentaux tels que la fréquence, la période, et l'amplitude.

Enfin, la notion de rigidité a été développée, permettant d'établir un lien direct entre les propriétés mécaniques de la structure et sa réponse dynamique.

Ces fondations sont indispensables pour aborder l'analyse des systèmes à un ou plusieurs degrés de liberté dans les chapitres suivants.

II. Oscillations libres à un seul degré de liberté

II.1 Introduction

L'étude des oscillations libres constitue une étape fondamentale dans la compréhension du comportement dynamique des structures. Lorsqu'un système est déplacé de sa position d'équilibre et relâché sans excitation externe, il oscille selon des lois déterminées par ses propriétés mécaniques. Un modèle simple mais très utile est celui à un seul degré de liberté, qui permet d'analyser les effets de la masse, de la raideur, et de l'amortissement sur la réponse vibratoire. La fréquence propre, la période de vibration et le taux d'amortissement sont des paramètres essentiels pour caractériser ce type de système. Différents régimes d'amortissement peuvent apparaître : faible, critique ou surcritique, chacun ayant une influence spécifique sur l'évolution temporelle de la réponse. L'analyse théorique est complétée par des méthodes expérimentales pour identifier ces paramètres. L'introduction de forces extérieures périodiques ou impulsives permet d'étendre l'étude à des réponses plus complexes. Enfin, les outils comme les spectres de réponse ou l'intégrale de Duhamel facilitent l'évaluation de la réponse à des sollicitations dynamiques réelles.

II.2 Définition

Un oscillateur à un degré de liberté est composé d'un bloc rigide de masse m , fixé à un support par un élément élastique. Ce système est représenté à la Figure II-1. Le seul mouvement autorisé est le déplacement horizontal $x(t)$ de la masse.

Le lien entre la masse et le support développe une force notée $F(x, \dot{x})$, dépendant du déplacement et de la vitesse de la masse. Cette force caractérise le **comportement dynamique de l'oscillateur**, tandis que la force externe $F(t)$ représente l'**excitation appliquée**.

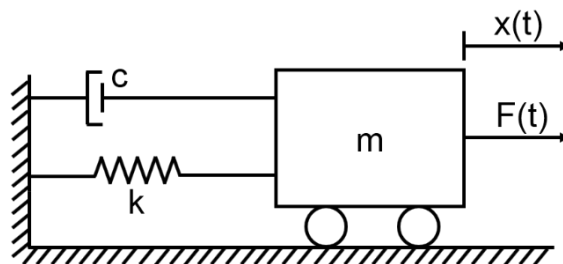


Figure II-1. Oscillateur à un seul degré de liberté soumis à une force variable dans le temps.

II.3 Formulation de l'équation du mouvement

L'application des trois méthodes de dynamique exposées au chapitre I (principe fondamental de la dynamique, principe des travaux virtuels, et Principe de Hamilton) conduit à l'équation différentielle suivante :

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + c\dot{x}(t) = F(t) \quad (\text{II. 1})$$

En divisant par la masse m , on obtient l'équation normalisée :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \frac{F(t)}{m} \quad (\text{II. 2})$$

L'écriture précédente montre que l'équation d'équilibre fait intervenir les deux grandeurs fondamentales suivantes caractérisant l'oscillateur :

- **Pulsation propre** : $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (rad/s),
- **Rapport d'amortissement** : $\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega} = \frac{c}{c_{cr}}$.

Avec :

- $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ est la **fréquence propre** (Hz),
- $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ est la **période propre** (s),
- $c_{cr} = 2m\omega = \frac{2k}{\omega}$ est le **amortissement critique**.

II.4 Résolution de l'équation du mouvement

II.4.1 Vibration libre

En absence de sollicitation externe ($F(t) = 0$), l'équation du mouvement (II.2) devient :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = 0 \quad (\text{II. 3})$$

La solution générale de cette équation est supposée sous la forme :

$$x(t) = \lambda e^{st} \quad (\text{II. 4})$$

Avec :

$$\dot{x}(t) = \lambda s e^{st}, \quad \ddot{x}(t) = \lambda s^2 e^{st} \quad (\text{II. 5})$$

En substituant (II.4) et (II.5) dans l'équation différentielle (II.3), on obtient l'équation caractéristique :

$$s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 = 0 \quad (\text{II. 6})$$

Le discriminant est :

$$\Delta = 4\omega^2(\xi^2 - 1) \quad (\text{II. 7})$$

Trois cas sont distingués selon la valeur de ξ :

1. Système non amorti $\xi = 0$,
2. Système à amortissement sous-critique $\xi < 1$ pour les systèmes physiques rencontrés dans la pratique,
3. Système à amortissement critique $\xi = 1$,
4. Système à amortissement surcritique $\xi > 1$.

II.4.1.1 Système non amorti ($\xi = 0$)

L'équation (II.3) devient :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (\text{II. 8})$$

Dont la solution s'écrit :

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad (\text{II. 9})$$

A et B représentent les amplitudes du mouvement peut s'exprimer en fonction des conditions initiales c'est-à-dire du déplacement $x(t = 0)$ et de la vitesse $\dot{x}(t = 0)$

À l'instant $t = 0$ en connaissant les oscillations libres du système, on voit immédiatement que :

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \rightarrow x(t = 0) = B \rightarrow B = x_0$$

$$\dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t) - B\omega \sin(\omega t) \rightarrow \dot{x}(t = 0) = A\omega \rightarrow A = \frac{\dot{x}_0}{\omega}$$

L'équation (II.9) devient :

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t) + x_0 \cos(\omega t) \quad (\text{II. 10})$$

Ou encore sous forme harmonique :

$$x(t) = \rho \cos(\omega t - \theta) \quad (\text{II. 11})$$

ρ désigne l'amplitude de la réponse et θ la phase :

$$\rho = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2 + (x_0)^2} \quad (\text{II. 11a})$$

$$\tan(\theta) = \frac{A}{B} = \frac{\dot{x}_0}{\omega x_0} \rightarrow \theta = \text{Arctg} \frac{\dot{x}_0}{\omega x_0} \quad (\text{II. 11b})$$

La figure II-2 représente la vibration du système au cours du temps :

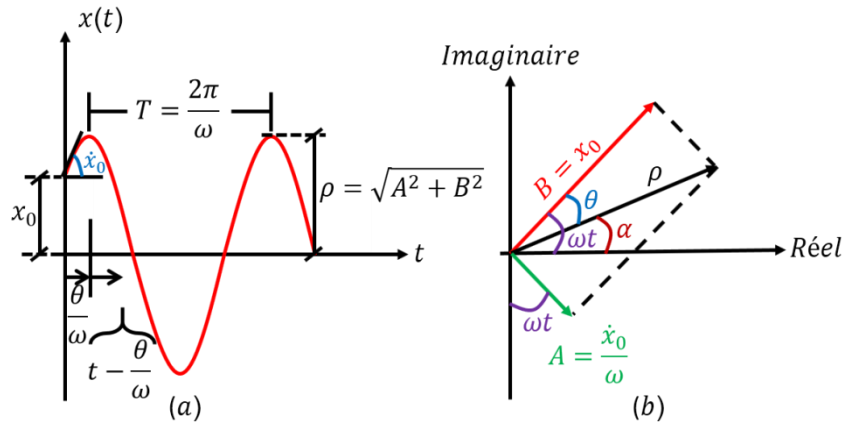


Figure II-2. Spectre de réponse en vibration libre d'un système non amorti (a), et représentation de la rotation des vecteurs de vibration libre non amortie (b).

II.4.1.2 Système à amortissement sous-critique ($\xi < 1$)

Ce cas correspond à $\xi < 1$ et $C < C_{cr}$. C'est le seul cas intéressant pour l'analyse du comportement dynamique des structures, celle-ci ayant toujours un **amortissement inférieur à l'amortissement critique**.

La solution de l'équation du mouvement en présence de l'amortissement conduit aux deux solutions :

$$s_{1,2} = \frac{-2\xi\omega \mp \sqrt{4\omega^2(\xi^2 - 1)}}{2} = -\xi\omega \mp \sqrt{\omega^2(\xi^2 - 1)} \quad (\text{II. 12a})$$

Lorsque $\xi^2 - 1 < 0$ et on sait que $i^2 = -1$, s devient :

$$s = -\xi\omega \mp \sqrt{i^2\omega^2(1 - \xi^2)} = -\xi\omega \mp i\sqrt{\omega^2(1 - \xi^2)} = -\xi\omega \mp i\omega_D \quad (\text{II. 12b})$$

Où $\omega_D = \omega\sqrt{(1 - \xi^2)}$ est la fréquence de vibration (pulsation propre amortie).

La solution générale s'écrit :

$$x(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} \quad (\text{II. 13a})$$

$$x(t) = Ae^{(-\xi\omega + i\omega_D)t} + Be^{(-\xi\omega - i\omega_D)t} \quad (\text{II. 13b})$$

A et B sont toujours déterminer par les conditions initiales, donc l'équation de la solution générale est :

$$x(t) = [A\sin(\omega_D t) + B\cos(\omega_D t)] e^{-\xi\omega t} \quad (\text{II. 14})$$

Avec :

$$B = x_0, \quad A = \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D}$$

Ce qui donne la solution :

$$x(t) = \left[\frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} \sin\omega_D t + x_0 \cos\omega_D t \right] e^{-\xi\omega t} \quad (\text{II. 15})$$

Ou sous forme harmonique :

$$x(t) = \rho e^{-\xi \omega t} \cos(\omega_D t - \theta) \quad (\text{II. 16})$$

Avec :

$$\rho = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(x_0)^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \xi \omega x_0}{\omega_D}\right)^2} \quad (\text{II. 16a})$$

$$\tan(\theta) = \frac{A}{B} = \frac{\dot{x}_0 + \xi \omega x_0}{x_0 \omega_D} \rightarrow \theta = \text{Arctg} \frac{\dot{x}_0 + \xi \omega x_0}{x_0 \omega_D} \quad (\text{II. 16b})$$

On notera que pour les facteurs d'amortissement le plus fréquemment rencontrés en structures $\xi < 20\%$.

La relation entre le rapport d'amortissement et le rapport de fréquence peut être représentée graphiquement par un cercle de rayon unitaire, comme illustré à la Figure II-3.

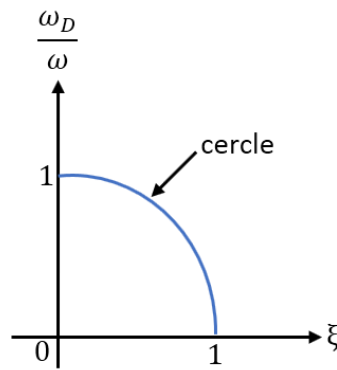


Figure II-3. Cercle d'amortissement représentant la relation entre le rapport de fréquence et le rapport d'amortissement.

Pour une réponse à déplacement initial x_0 avec vitesse nulle $\dot{x}_0 = 0$, le système sous amorti oscille autour de la position d'équilibre avec une amplitude qui décroît exponentiellement (Figure II-4).

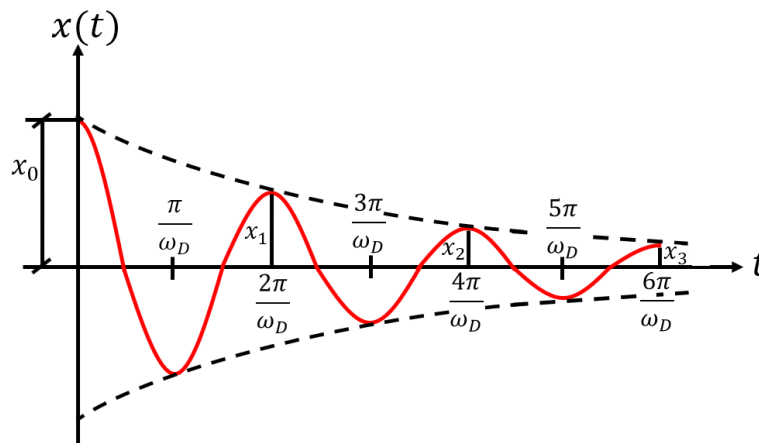


Figure II-4. Spectre de réponse en vibration libre d'un système à amortissement sous critique.

II.4.1.3 Système à amortissement critique ($\xi = 1$)

Lorsque le discriminant de l'équation caractéristique (II.6) est nul, cela correspond à un amortissement critique, c'est-à-dire lorsque :

$$C = C_{cr} = 2m\omega \quad \text{et} \quad \omega = \frac{C}{2m}$$

Dans ce cas, les deux racines de l'équation caractéristique sont réelles et égales :

$$s_1 = s_2 = \frac{-C_{cr}}{2m} = -\omega \quad (\text{II. 17})$$

La solution de l'équation différentielle (II.3) doit alors prendre la forme :

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\omega t} \quad (\text{II. 18})$$

La présence du terme linéaire Bt est nécessaire en raison de la multiplicité des racines.

x_0 avec vitesse nulle $\dot{x}_0 = 0$

En appliquant les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, les constantes A et B peuvent être déterminées, ce qui conduit à l'expression suivante :

$$x(t) = [x_0(1 - \omega t) + \dot{x}_0 t]e^{-\omega t} \quad (\text{II. 19})$$

Cette solution montre que le déplacement décroît exponentiellement vers zéro sans oscillations. La courbe correspondante est illustrée à la Figure II-5.

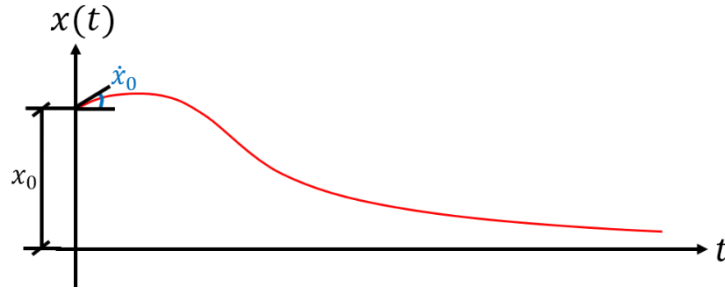


Figure II-5. Spectre de réponse en vibration libre d'un système à amortissement critique.

II.4.1.4 Système à amortissement surcritique ($\xi > 1$)

Ce cas correspond à un amortissement supérieur à l'amortissement critique, c'est-à-dire lorsque :

$$C > C_{cr} \quad \text{et donc} \quad \xi > 1$$

Les racines de l'équation caractéristique (II.6) sont réelles, distinctes et négatives :

$$s_{1,2} = -\xi\omega \mp \omega\sqrt{(\xi^2 - 1)} = -\xi\omega \mp \omega_D \quad (\text{II. 20})$$

Avec :

$$\omega_D = \omega\sqrt{(\xi^2 - 1)} \quad (\text{II. 20a})$$

La solution générale de l'équation différentielle (II.3) est alors donnée par :

$$x(t) = \left[\frac{\dot{x}_0 + \xi \omega x_0}{\omega_D} \sinh(\omega_D t) + x_0 \cosh(\omega_D t) \right] e^{-\xi \omega t} \quad (\text{II. 21})$$

La réponse d'un système à amortissement surcritique est similaire au mouvement d'un système à amortissement critique, comme illustré à la Figure II-5; Cependant, le retour asymptotique à la position de déplacement initial ($x_0 = 0$) est plus lent en fonction de la valeur d'amortissement (Figure II-6).

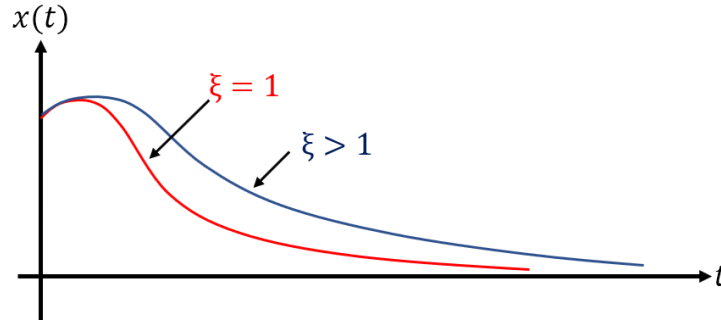


Figure II-6. Spectre de réponse en vibration libre d'un système à amortissement critique et surcritique.

II.4.1.5 Détermination du coefficient d'amortissement

Une méthode pratique pour la détermination du coefficient d'amortissement expérimental ξ , c'est la mesure du taux de décroissance de l'amplitude d'un système amorti en oscillation libre.

Considérons deux pics positifs ou négatifs successifs de réponse, tels que x_n et x_{n+1} , qui se produisent aux instants $n(\frac{2\pi}{\omega_D})$ et $(n + 1)(\frac{2\pi}{\omega_D})$, respectivement.

Considérons :

$$x_n(t_n) = \left[\frac{\dot{x}_0 + \xi \omega x_0}{\omega_D} \sin\left(\frac{2\pi}{t_n} t_n\right) + x_0 \cos\left(\frac{2\pi}{t_n} t_n\right) \right] e^{-\xi \omega t_n} = x_0 e^{-\xi \omega t_n} \quad (\text{II. 22})$$

Alors,

$$x_n(t_n) = x_0 e^{-\xi \omega t_n} \text{ et } x_{n+1}(t_{n+1}) = x_0 e^{-\xi \omega t_{n+1}}$$

Donc le rapport des amplitudes est égal à :

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{e^{-\xi \omega t_n}}{e^{-\xi \omega t_{n+1}}} = \frac{e^{-\xi \omega t_n}}{e^{-\xi \omega t_n} \cdot e^{-\xi \omega t}} = \frac{1}{e^{-\xi \omega t}} = e^{\xi \omega t} = e^{2\pi \xi \frac{\omega}{\omega_D}} \quad (\text{II. 23})$$

En prenant le logarithme des deux membres de l'équation (II.23), on obtient le décrément logarithmique δ :

$$\delta = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = 2\pi \xi \frac{\omega}{\omega_D} = \frac{2\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (\text{II. 24})$$

Et pour l'amortissement $\xi \leq 20\%$ ($\sqrt{1 - \xi^2} \approx 1$), se réduit à :

$$\delta = 2\pi\xi \quad (\text{II. 25})$$

Remarque :

Il faut rappeler que le décrement logarithmique est défini uniquement pour les systèmes sous-critique car les autres systèmes n'oscillent pas.

$$\delta = \ln \frac{x_i}{x_{i+1}}; \delta = \ln \frac{x_{i+1}}{x_{i+2}}; \delta = \ln \frac{x_{i+2}}{x_{i+3}}; \dots; \delta = \ln \frac{x_{i+(k-1)}}{x_{i+k}}$$

Si on somme :

$$k\delta = \ln \frac{x_i}{x_{i+1}} + \ln \frac{x_{i+1}}{x_{i+2}} + \ln \frac{x_{i+2}}{x_{i+3}} + \dots + \ln \frac{x_{i+(k-1)}}{x_{i+k}} + \ln \frac{x_{i+k}}{x_{i+k}}$$

$$k\delta = \ln \left(\frac{x_i}{x_{i+1}} \times \frac{x_{i+1}}{x_{i+2}} \times \frac{x_{i+2}}{x_{i+3}} \times \dots \times \frac{x_{i+(k-1)}}{x_{i+k}} \times \frac{x_{i+k}}{x_{i+k}} \right)$$

$$k\delta = \ln \frac{x_i}{x_{i+k}}$$

Finalement on obtient :

$$\delta = \frac{1}{k} \ln \frac{x_i}{x_{i+k}}$$

Où k est le nombre de cycles séparant deux amplitude (x_i et x_{i+k}).

Dans le cas courant le coefficient ξ est inférieur à 20%, on voit donc que d'après $\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$ on peut confondre ω_D et ω avec une précision meilleure que 2%.

II.4.2 Vibration forcée

Supposons que le système de la Figure II-1 soit soumis à une charge $p(t)$ harmonique de forme sinusoïdale présentant une amplitude p_0 et une fréquence circulaire (excitation) $\bar{\omega}$ variant harmoniquement, comme le montre l'équation du mouvement :

$$m\ddot{x} + kx + C\dot{x} = p(t) \quad (\text{II. 26})$$

Où :

$$p(t) = p_0 \sin \bar{\omega} t \quad (\text{II. 26a})$$

Avant de considérer ce cas d'amortissement, il est utile d'examiner le comportement d'un système non amorti.

II.4.2.1 Vibration forcée d'un système non amorti

Le comportement d'un système non amorti contrôlé par l'équation :

$$m\ddot{x} + kx = p_0 \sin \bar{\omega} t \quad (\text{II. 27})$$

qui a une solution complémentaire de la forme de vibration libre :

$$x_c(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad (\text{II. 28})$$

La solution générale doit également inclure la solution particulière qui dépend directement à la forme du chargement dynamique. Dans ce cas de chargement harmonique, il est raisonnable de supposer que le mouvement correspondant est harmonique et en phase avec le chargement ; ainsi, la solution particulière est :

$$x_p(t) = C \sin \bar{\omega} t \quad (\text{II. 29})$$

dans lequel l'amplitude C doit être évaluée.

En remplaçant la solution particulière (II. 29) dans l'équation du mouvement (II. 27) donne :

$$-mC\bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} t + kC \sin \bar{\omega} t = p_0 \sin \bar{\omega} t \quad (\text{II. 30})$$

En divisant l'équation (II. 30) par $\sin \bar{\omega} t$ (qui est non nul en général) et par k et en notant que $\omega^2 = \frac{k}{m}$, on obtient après un certain réarrangement :

$$C = \frac{p_0}{k} \left[\frac{1}{1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2}} \right] = \frac{p_0}{k} \left[\frac{1}{1 - \beta^2} \right] \quad (\text{II. 31})$$

Où β est le rapport de la fréquence de charge appliquée à la fréquence propre d'oscillation, où le rapport de fréquence est :

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \quad (\text{II. 31a})$$

Alors la solution particulière s'écrit :

$$x_p(t) = \frac{p_0}{k} \left[\frac{1}{1 - \beta^2} \right] \sin \bar{\omega} t \quad (\text{II. 32})$$

La solution générale correspond à une excitation appliquée à un système non amorti est maintenant obtenu en combinant la solution complémentaire (II. 28) et la particulière (II. 32) qui dépend de la forme du chargement dynamique, ainsi, on obtient :

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) + \frac{p_0}{k} \left[\frac{1}{1 - \beta^2} \right] \sin \bar{\omega} t \quad (\text{II. 33})$$

Où les valeurs de A et B dépendent aux conditions initiales.

Pour le système qui commence à partir de repos, c'est-à-dire que $x(t=0) = 0$ et $\dot{x}(t=0) = 0$, il est facile de montrer que :

$$B = 0, \text{ et } A = -\frac{p_0\beta}{k} \left[\frac{1}{1-\beta^2} \right]$$

La solution générale devient :

$$x(t) = \frac{p_0}{k} \left[\frac{1}{1-\beta^2} \right] (\sin\bar{\omega}t - \beta\sin(\omega t)) \quad (\text{II. 34})$$

Où :

- $\frac{p_0}{k} = x_{st}$: est le déplacement statique, c'est-à-dire le déplacement qui serait produit par la charge p_0 appliquée statiquement.
- $\frac{1}{1-\beta^2}$: est le facteur d'amplification représentant l'effet de la charge appliquée harmoniquement.
- $\sin\bar{\omega}t$: représente la composante de réponse à la fréquence du chargement appliqué, la réponse en oscillation directement liée au chargement appliqué.
- $\beta\sin(\omega t)$: est le composant de la réponse à la fréquence propre du système sous l'effet de vibration libre qui dépend aux conditions initiales.

II.4.2.2 Vibration forcée d'un système amorti

Revenant à l'équation du mouvement (II. 27), y compris l'amortissement, en divisant par m et en notant que $\frac{c}{m} = 2\xi\omega$ conduit à :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \frac{p_0}{m} \sin\bar{\omega}t \quad (\text{II. 35})$$

La solution générale est :

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) \quad (\text{II. 36})$$

La solution complémentaire de cette équation est :

$$x_c(t) = [A\sin(\omega_D t) + B\cos(\omega_D t)] e^{-\xi\omega t} \quad (\text{II. 37})$$

La solution particulière est de la forme :

$$x_p(t) = G_1\sin(\bar{\omega}t) + G_2\cos(\bar{\omega}t) \quad (\text{II. 38})$$

dans lequel le second terme ($G_2\cos(\bar{\omega}t)$) est requis car, en général, la réponse d'un système amorti n'est pas en phase avec le chargement appliqué.

En remplaçant l'équation particulière (II. 38) dans l'équation du mouvement (II. 35) :

$$\begin{aligned} -G_1\bar{\omega}^2\sin\bar{\omega}t - G_2\bar{\omega}^2\cos\bar{\omega}t + 2\xi\omega(G_1\bar{\omega}\cos\bar{\omega}t - G_2\bar{\omega}\sin\bar{\omega}t) + \omega^2[G_1\sin(\bar{\omega}t) + G_2\cos(\bar{\omega}t)] \\ = \frac{p_0}{m} \sin\bar{\omega}t \end{aligned} \quad (\text{II. 39a})$$

$$[-G_2\bar{\omega}^2 + G_1\bar{\omega}(2\xi\omega) + G_2\omega^2]\cos(\bar{\omega}t) + \left[-G_1\bar{\omega}^2 - G_2\bar{\omega}(2\xi\omega) + G_1\omega^2 - \frac{p_0}{m}\right]\sin(\bar{\omega}t) = 0 \quad (\text{II. 39b})$$

Afin de satisfaire cette équation pour toutes les valeurs de t , il est nécessaire que chacune des deux termes de sinus et cosinus soit égale à zéro ; ainsi, on obtient

$$-G_2\bar{\omega}^2 + G_1\bar{\omega}(2\xi\omega) + G_2\omega^2 = 0 \rightarrow G_12\xi\omega\bar{\omega} + G_2(\omega^2 - \bar{\omega}^2) = 0 \quad (\text{II. 39c})$$

$$-G_1\bar{\omega}^2 - G_2\bar{\omega}(2\xi\omega) + G_1\omega^2 - \frac{p_0}{m} = 0 \rightarrow G_1(\omega^2 - \bar{\omega}^2) - G_22\xi\omega\bar{\omega} - \frac{p_0}{m} = 0 \quad (\text{II. 39d})$$

Et les fonctions sinus et cosinus ne s'annulent simultanément.

Ces deux équations (II. 39. b) et (II. 39. c) deviennent été satisfaites individuellement en divisant par ω^2 :

$$G_12\xi\frac{\bar{\omega}}{\omega} + G_2\left(1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2}\right) = 0 \rightarrow G_12\xi\beta + G_2(1 - \beta^2) = 0 \quad (\text{II. 39e})$$

$$G_1\left(1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2}\right) - G_22\xi\frac{\bar{\omega}}{\omega} - \frac{p_0}{m\omega^2} = 0 \rightarrow G_1(1 - \beta^2) - G_22\xi\beta - \frac{p_0}{k} = 0 \quad (\text{II. 39f})$$

La résolution de ces deux équations (II. 39. d) et (II. 39. e) donne :

$$G_1 = \frac{p_0}{k} \left[\frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right] \quad (\text{II. 40})$$

$$G_2 = \frac{p_0}{k} \left[\frac{-2\xi\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right] \quad (\text{II. 41})$$

Introduire ces expressions (II. 40) et (II. 41) dans la solution particulière (II. 38) et en combinant le résultat avec la solution complémentaire (II. 37), la solution générale est obtenue sous la forme :

$$x(t) = [A\sin(\omega_D t) + B\cos(\omega_D t)] e^{-\xi\omega t} + \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} [(1 - \beta^2)\sin(\bar{\omega}t) - (2\xi\beta)\cos(\bar{\omega}t)] \quad (\text{II. 42})$$

$$x(t) = [A\sin(\omega_D t) + B\cos(\omega_D t)] e^{-\xi\omega t} + \rho\sin(\bar{\omega}t - \theta) \quad (\text{II. 43})$$

Le premier terme de cette équation (II. 43) représente la réponse transitoire qui disparaît rapidement avec le temps et ne représente que peut intérêt, tandis que le deuxième terme représente la réponse permanente, sa fréquence est elle de la charge appliquée mais avec un déphasage, alors la solution devient :

$$x(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} [(1 - \beta^2)\sin(\bar{\omega}t) - (2\xi\beta)\cos(\bar{\omega}t)] = \rho\sin(\bar{\omega}t - \theta) \quad (\text{II. 44})$$

Le module ρ de la résultante représente l'amplitude de la réponse permanente :

$$\rho = \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} = \frac{p_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{p_0}{k} D \quad (\text{II. 44a})$$

La solution du mouvement permanent devient :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} [(1 - \beta^2)\sin(\bar{\omega}t) - (2\xi\beta)\cos(\bar{\omega}t)] \\ &= \frac{p_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \sin(\bar{\omega}t - \theta) \end{aligned} \quad (\text{II. 45})$$

Avec $\beta = \sqrt{1 - 2\xi^2}$, est définie si et seulement si $1 - 2\xi^2 > 0 \rightarrow \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Où :

- $\frac{p_0}{k}$: est le coefficient représente le déplacement statique du système sous l'action de la force p_0 .
- $D = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{1}{2\xi} \frac{\omega}{\omega_D}$: est le rapport de l'amplitude de réponse en mouvement permanent et du déplacement statique qui serait produit par la force p_0 s'appelle **facteur d'amplification dynamique**.

Ce facteur d'amplification dynamique est représenté sur la Figure II-7 en fonction du rapport β . Il vaut bien évidemment 1 pour un chargement statique. Lorsque $\bar{\omega}$ tend vers l'infini, D tend vers 0 quelle que soit la valeur de ξ . A très haute fréquence, les forces d'inertie deviennent prépondérantes devant les forces élastique F_K et d'amortissement F_C ; elles tendent vers l'infini et s'opposent au mouvement : la masse reste "immobile".

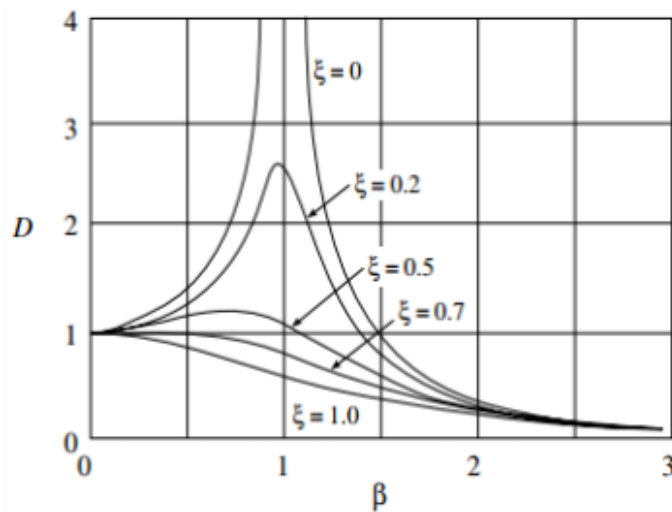


Figure II-7. Facteur d'amplification dynamique.

Lorsque la pulsation $\bar{\omega}$ de la sollicitation coïncide avec la pulsation propre ω de l'oscillateur ($\bar{\omega} = \omega$) « la résonance », le facteur d'amplification D passe par un maximum égal à :

$$D_{max} = \frac{1}{2\xi} \text{ Où } \beta = 1 \quad (\text{II. 46})$$

Ce phénomène est connu sous le nom de résonance. Lorsque l'amortissement est nul, D_{max} devient infini.

La phase θ est donnée par la formule ci-dessus est représentée sur la Figure II-8 en fonction de β :

$$\theta = \text{Arctg} \frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2} \quad (\text{II. 47})$$

Où : $0^\circ < \theta < 180^\circ$

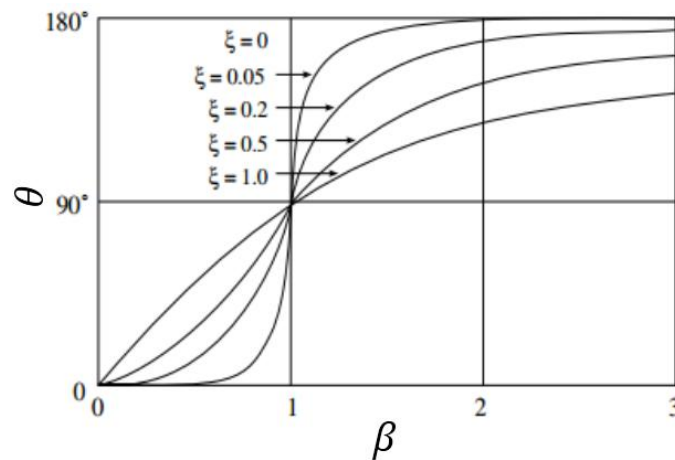


Figure II-8. Phase de la réponse stationnaire.

A faible fréquence, la phase est nulle ou négligeable : le système répond instantanément à la sollicitation. Lorsque la résonance est atteinte ($\beta = 1$), il se produit un déphasage de 90° entre force appliquée et déplacement résultant : le déplacement est nul lorsque la force est maximale, et vice-versa. A haute fréquence, le déplacement est maximal, en valeur absolue, au même instant que la force mais se produit dans la direction opposée à la force. Rappelons que corrélativement, comme on l'a vu précédemment, son amplitude tend vers 0.

II.4.2.3 Etude de la résonance

On a vu que pour l'oscillateur simple, lorsque la pulsation de la sollicitation coïncidait avec la fréquence propre de l'oscillateur, la réponse, en termes de déplacement, passait par un maximum qui pouvait être infini si l'amortissement de l'oscillateur était nul ; cette tendance peut être observée sur la Figure II-8. Pour les faibles valeurs d'amortissement, on voit sur cette même figure que l'amplitude de réponse maximale en régime permanent se produit à un rapport de fréquence légèrement inférieur à l'unité. Même ainsi, la condition résultante lorsque le rapport de fréquence est égal à l'unité, c'est-à-dire lorsque la fréquence de la charge appliquée est égale à la fréquence de vibration naturelle non amortie, est appelée résonance.

Le facteur d'amplification dynamique D dans cette condition ($\beta = 1$) est :

$$D_{\beta=1} = \frac{1}{2\xi}$$

Pour trouver la valeur maximale où la valeur de pic du facteur d'amplification dynamique, il faut différencier son équation par rapport à β et résoudre l'expression résultante pour obtenir β :

$$\beta_{pic} = \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (\text{II. 48})$$

qui donne des valeurs réelles positives pour les facteurs d'amortissement $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$, le facteur d'amplification dynamique D devient :

$$D_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - 2\xi^2}} = \frac{1}{2\xi} \frac{\omega}{\omega_D} \quad (\text{II. 49})$$

La différence entre ces deux équations du facteur d'amplification dynamique D est faible, la différence étant la moitié de 1% pour $\xi = 10\%$ et de 2% pour $\xi = 20\%$

Pour une compréhension plus complète de la nature de la réponse résonante d'une structure au chargement harmonique, il est nécessaire de considérer la solution générale, qui comprend le terme transitoire ainsi que le terme en régime permanent. À la fréquence d'excitation résonante ($\beta = 1$), cette équation devient :

$$x(t) = [A\sin(\omega_D t) + B\cos(\omega_D t)] e^{-\xi\omega t} - \frac{p_0 \cos(\omega t)}{k \frac{1}{2\xi}} \quad (\text{II. 50})$$

En supposant que le système soumis à des conditions initiales nulles en déplacement $x(t = 0) = 0$ et vitesse, $\dot{x}(t = 0) = 0$, les constantes sont :

$$A = \frac{p_0}{k} \frac{\omega}{2\omega_D} = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\sqrt{1-\xi^2}} \quad \text{et} \quad B = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\xi}$$

Ainsi, l'équation (II. 50) devient :

$$x(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\xi} \left[\left(\frac{\xi}{2\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_D t) + \cos(\omega_D t) \right) e^{-\xi\omega t} - \cos(\omega t) \right] \quad (\text{II. 51a})$$

qui se simplifie pour les faibles valeurs de ξ (qui à prévoir dans les systèmes structuraux) et un temps t suffisamment élevé en :

$$x(t) = \frac{p_0}{2k\xi} (e^{-\xi\omega t} - 1) \cos(\omega t) \quad (\text{II. 51b})$$

Lorsque le système est non amorti, le passage à la limite de l'équation pour $\xi \rightarrow 0$ donne pour réponse :

$$x(t) = \frac{p_0}{2k} [\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)] \quad (\text{II. 51c})$$

II.4.3 Réponse du mouvement d'un support :

Dans les cas précédents, on s'est intéressé à la réponse d'un oscillateur à un degré de liberté soumis à des sollicitations appliquées directement à la masse m . Une autre forme de sollicitation est celle constituée par un mouvement du support. C'est en particulier le cas de sollicitations provenant par le sol comme les vibrations ambiantes ou les sollicitations sismiques ; dans ce cas, le support de l'oscillateur simple représente le sol.

- $x_s(t) = x_{s0} \sin \bar{\omega} t$: déplacement de la base de support,
- x_r : déplacement relatif de la structure,
- $x_T(t) = x_s(t) + x_r(t)$: déplacement total (structure + support).

II.4.3.1 Equation différentielle du mouvement en fonction du déplacement total

Selon la Figure ci-dessous (Figure II-9), on a :

$$\sum F = 0 \rightarrow F_I + F_{Is} + F_c + F_k = 0 \quad (\text{II. 52})$$

$$m\ddot{x}_r + m\ddot{x}_s + c\dot{x}_r + kx_r = 0 \quad (\text{II. 53})$$

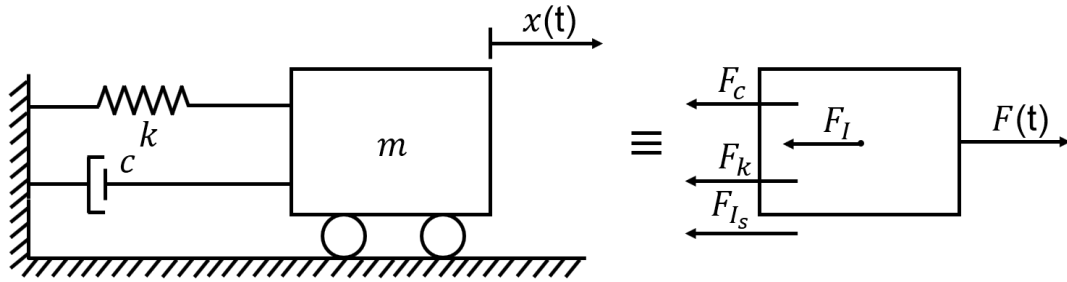


Figure II-9. Oscillateur à un seul degré de liberté avec un mouvement du support.

$$x_T(t) = x_s(t) + x_r(t) \rightarrow x_r(t) = x_T(t) - x_s(t) \quad (\text{II. 54})$$

En remplaçant l'équation (II. 53) dans l'équation (II. 52), on obtient :

$$m(\ddot{x}_T - \ddot{x}_s) + m\ddot{x}_s + c(\dot{x}_T - \dot{x}_s) + k(x_T - x_s) = 0 \quad (\text{II. 55})$$

En simplifiant, l'équation (II. 54) devient :

$$m\ddot{x}_T + c\dot{x}_T + kx_T = c\dot{x}_s + kx_s \quad (\text{II. 56})$$

Avec :

$$x_s(t) = x_{s0} \sin \bar{\omega} t \rightarrow \dot{x}_s(t) = x_{s0} \bar{\omega} \cos \bar{\omega} t$$

Ce qui donne :

$$m\ddot{x}_T + c\dot{x}_T + kx_T = cx_{s0} \bar{\omega} \cos \bar{\omega} t + kx_{s0} \sin \bar{\omega} t \quad (\text{II. 57a})$$

$$m\ddot{x}_T + c\dot{x}_T + kx_T = p_0 \sin(\bar{\omega}t - \gamma) \quad (\text{II. 57b})$$

Où :

$$\tan(\gamma) = \frac{c\bar{\omega}x_{s0}}{kx_{s0}} = \frac{c\bar{\omega}}{k} \quad (\text{II. 58a})$$

Et comme : $\xi = \frac{c}{2m\omega} \rightarrow c = 2m\omega\xi$ et $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow k = \omega^2 m$

Donc :

$$\tan(\gamma) = \frac{2m\omega\xi\bar{\omega}}{k} = 2\xi \frac{\bar{\omega}}{\omega} = 2\xi\beta \quad (\text{II. 58b})$$

Ainsi que :

$$p_0 = \sqrt{(kx_{s0})^2 + (cx_{s0}\bar{\omega})^2} = x_{s0}k\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} \quad (\text{II. 59})$$

La solution du mouvement dans ce cas est donner par :

$$x(t) = \text{réponse transitoire} + \text{réponse permanente}$$

$$x(t) = \frac{p_0}{k} D \sin(\bar{\omega}t + \gamma - \theta) = \frac{x_{s0}\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \sin(\bar{\omega}t + \gamma - \theta) \quad (\text{II. 60})$$

Où, $\gamma - \theta$: déphasage entre le déplacement total et le déplacement du sol (support).

II.4.3.2 Equation différentielle du mouvement en fonction du déplacement relatif

L'équation (II.53) peut s'écrire :

$$m\ddot{x}_r + c\dot{x}_r + kx_r = -m\ddot{x}_s \quad (\text{II. 61})$$

Avec :

$$\ddot{x}_s = x_{s0}\bar{\omega}^2 \sin\bar{\omega}t \text{ et } \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$

Donc l'équation (II.61) devient :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_r + c\dot{x}_r + kx_r &= -m\ddot{x}_s = mx_{s0}\bar{\omega}^2 \sin\bar{\omega}t = x_{s0}m\beta^2\omega^2 \sin\bar{\omega}t \\ &= x_{s0}k\beta^2 \sin\bar{\omega}t = p_0 \sin\bar{\omega}t \end{aligned} \quad (\text{II. 62})$$

La solution permanente s'écrit :

$$x_p(t) = \rho \sin(\bar{\omega}t - \theta) \quad (\text{II. 63})$$

Avec :

$$\frac{p_0}{k} = \frac{mx_{s0}\bar{\omega}^2}{k} = \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2} x_{s0} = x_{s0}\beta^2$$

Donc l'équation du mouvement en fonction du déplacement relatif s'écrit comme suite :

$$x_r(t) = \frac{x_{s0}\beta^2}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \sin(\bar{\omega}t - \theta) \quad (\text{II. 64})$$

II.4.4 Isolation vibratoire

On distingue deux types d'isolation :

Une machine engendre des forces périodiques susceptibles de détériorer la structure qui la porte (on transmette des vibrations indésirables c'est le cas d'amortie mal équilibré, où des instruments fragiles sont portés par une structure qui vibre de manière conséquente.

a. Machine vibrante

La machine tournante (Figure II-10) produit une force verticale oscillatoire $p(t) = p_0 \sin \bar{\omega} t$. La machine mal équilibrée est montée sur un support à un degré de liberté (type ressort-amortisseur).

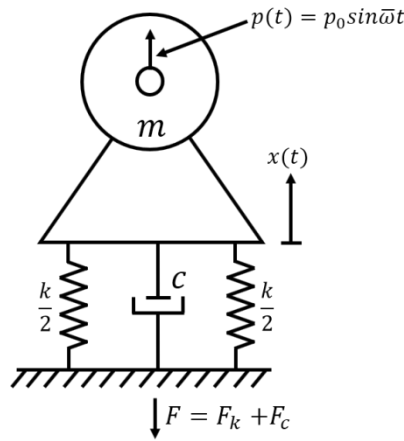


Figure II-10. Oscillateur à un seul degré de liberté avec un mouvement du support.

La réponse de déplacement relatif stable (en régime permanent) est donnée par :

$$x(t) = \frac{p_0}{k} D \sin(\bar{\omega} t - \theta) \quad (\text{II. 65})$$

$$F_k = kx(t) = p_0 D \sin(\bar{\omega} t - \theta) \quad (\text{II. 66})$$

$$F_c = c\dot{x}(t) = c \frac{p_0}{k} D \bar{\omega} \cos(\bar{\omega} t - \theta) = 2\xi\beta p_0 D \cos(\bar{\omega} t - \theta) \quad (\text{II. 67})$$

Étant donné que ces deux forces sont déphasées de 90° l'une par rapport à l'autre, il est évident que l'amplitude de la force de réaction de base totale est donnée par :

$$F_{max} = \sqrt{F_k^2 + F_c^2} = \sqrt{(p_0 D)^2 + (2\xi\beta p_0 D)^2} = p_0 D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} \quad (\text{II. 68})$$

Le rapport de la force max à la base et de l'amplitude de la force appliquée que nous appelons :

$$T_R = \frac{F_{max}}{p_0} = D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} \quad (\text{II. 69})$$

Où :

T_R : est le rapport de transmissibilité des vibrations (excitation par chargement ou par vibration).

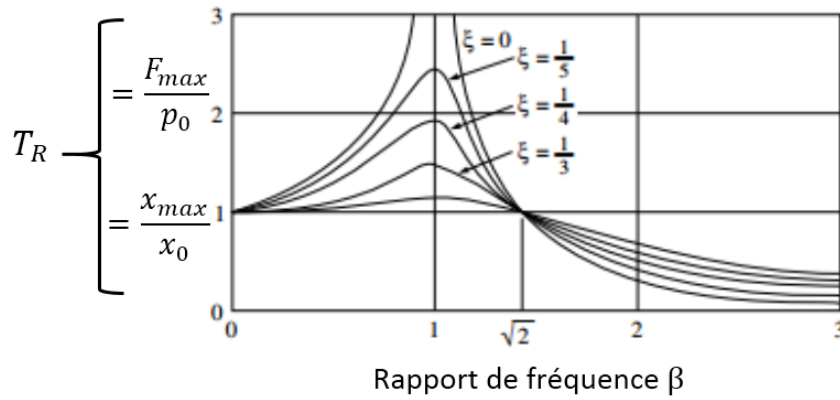


Figure II-11. La relation entre le rapport de fréquence et de transmissibilité.

Toutes courbes passent par un même point correspondant un support de fréquence $\beta = \sqrt{2}$ la différence avec l'autre courbe D en fonction de β est due à l'influence de la force d'amortissement. Il est donc évident que l'amortissement réduire l'efficacité d'un système d'isolation en vibration pour toute fréquence supérieure au rapport critique $\beta = \sqrt{2}$.

b. Support vibrant

Masse à isoler portée par un système ressort-amortisseur sur un dalle soumise à des vibrations harmonique verticales (Figure II-12).

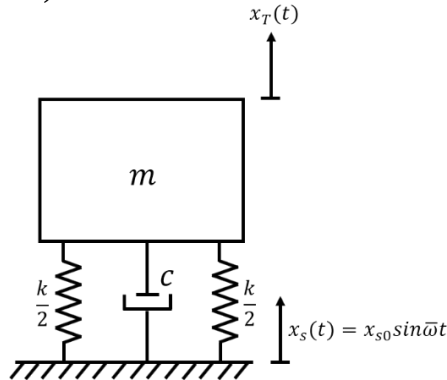


Figure II-12. Support vibrant.

Le déplacement de la masse par rapport à la base :

$$x(t) = x_{s0} \beta^2 D \sin(\bar{\omega} t - \theta) \quad (\text{II. 70})$$

En ajoutant vectoriellement le mouvement à la base on peut montrer que le mouvement total de la masse est :

$$x_T(t) = x_{s0} \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} D \sin(\bar{\omega} t - \theta) \quad (\text{II. 71})$$

La transmittance dans ce cas est le rapport de l'amplitude du mouvement de la masse et de l'amplitude du mouvement de la base :

$$T_R = \frac{x_{Tmax}}{x_{s0}} = \frac{x_{s0} \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} D}{x_{s0}} D = D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} \quad (\text{II. 72})$$

Dans les deux cas de figure la transmittance est la même.

La courbe T_R en fonction de β permet de définir l'efficacité des systèmes d'isolation en vibration (pour les deux types de problèmes) lorsqu'on calcule un système d'isolation en vibration, il est commode d'exprimer son comportement en fonction de son efficacité d'isolation plutôt qu'en fonction de la transmittance, cette efficacité :

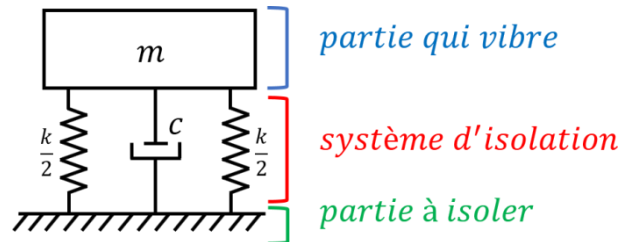
$$T_R = \frac{1}{\beta^2 - 1} \rightarrow 1 - T_R = EI = \frac{\beta^2 - 2}{\beta^2 - 1} (\text{efficacité d'isolation}) \quad (\text{II. 73})$$

On voit que sur la figure qui un système ne fonctionne bien que lorsque le rapport de fréquence $\beta > \sqrt{2}$ et que l'amortissement est indésirable (c.à.d. $\xi = 0$).

II.4.4.1 Récapitulation

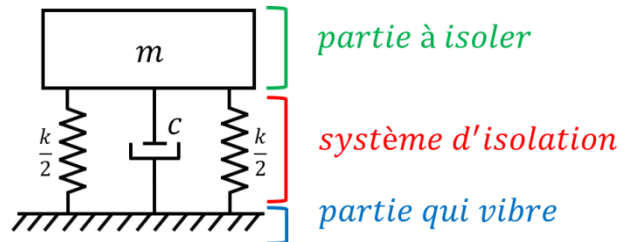
a. Support à isoler :

$$T_R = \frac{F_{\max}(t)}{F_0} = \frac{F_0}{F_0} D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$$



b. Structure à isoler :

$$T_R = \frac{x_{T\max}(t)}{x_{s0}} = \frac{x_0}{x_0} D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$$



Donc :

$$T_R = D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

Exercice :

Des déflexions se développent parfois dans les poutres de pont en béton en raison du fluage, et si le pont se compose d'une longue série de portées identiques, ces déformations entraîneront une excitation harmonique, dans un véhicule traversant le pont à une vitesse constante. Bien entendu, les ressorts et les amortisseurs de la voiture sont destinés à fournir un système d'isolation contre les vibrations qui limitera les mouvements verticaux transmis de la route aux occupants.

La Figure II-13 montre un modèle hautement idéalisé de ce type de système, dans lequel le poids du véhicule est de 1814 kget sa rigidité du ressort est définie par un test qui a montré que l'ajout de 45,52 kg a provoqué une déviation de 0,208 cm. Le profil du pont est représenté par une courbe sinusoïdale ayant une longueur (poutre) de 12,2 m et une amplitude de 3,05 cm. À partir de

ces données, il est souhaitable de prédire les mouvements verticaux à l'état stationnaire de la voiture lorsqu'elle roule à une vitesse de 72,4 km/h, en supposant que l'amortissement est de 40%.

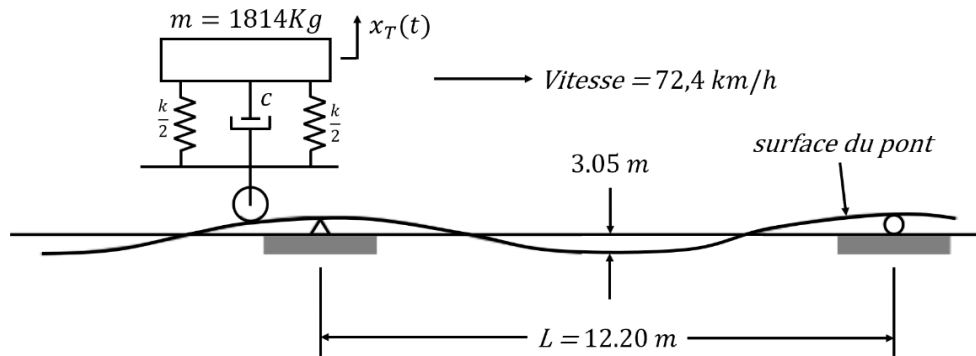


Figure II-13. Véhicule se déplace sur un pont inégal à une vitesse constante.

Solution :

La période d'excitation est :

$$T_p = \frac{l}{v} = \frac{12.2}{72.4 \times 10^3} \times 3600 = 0.607 \text{ sec}$$

La période naturelle du véhicule est :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}}$$

$$k = \frac{F}{x} = \frac{45.52 \times 10 \times 10^{-3}}{0.208 \times 10^{-2}} = 218.846 \text{ kN/m}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1814}{223.448 \times 10^3}} = 0.572 \text{ sec}$$

D'où $\beta = \frac{T}{T_p} = \frac{0.572}{0.607} = 0.942$, et avec $\xi = 0,4$ l'amplitude de la réponse est :

$$T_R = \frac{x_{Tmax}(t)}{x_{s0}}$$

$$T_R = D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{\sqrt{1 + (2 \times 0.4 \times 0.942)^2}}{\sqrt{(1 - 0.942^2)^2 + (2 \times 0.4 \times 0.942)^2}} = 1.643$$

$$x_{Tmax}(t) = T_R \times x_{s0} = 1.643 \times 3.05 = 5.011 \text{ cm}$$

Il est également intéressant de noter que s'il n'y avait pas d'amortissement dans le véhicule ($\xi = 0$), l'amplitude serait :

$$T_R = \frac{1}{1 - \beta^2}$$

Alors :

$$x_{Tmax}(t) = T_R \times x_{s0} = \frac{1}{1 - \beta^2} \times x_{s0} = \frac{1}{1 - 0.942^2} \times 3.05 = 27.078 \text{ cm}$$

II.5 Excitation périodiques spéciales et générales

II.5.1 Réponse d'un système à un degré de liberté à une excitation périodique

Généralement n'importe quel mouvement périodique s'exécute d'après la fonction $x = p(t)$ où $p(t)$ étant un périodique et peut être considérée comme un mouvement résultant d'une superposition d'une infinité de vibration harmonique (c.à.d. d'une somme infinie de termes en sinus et en cosinus). Une telle somme de composantes est connue sous le nom de série de Fourier.

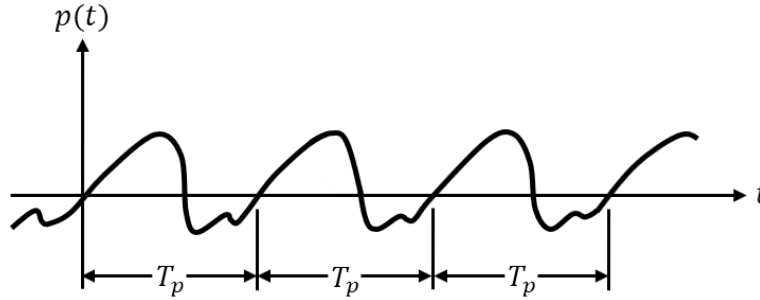


Figure II-14. Chargement périodique arbitraire.

$$p(t) = a_0 + a_1 \cos \bar{\omega} t + a_2 \cos 2\bar{\omega} t + \dots + a_n \cos n\bar{\omega} t + b_1 \sin \bar{\omega} t + b_2 \sin 2\bar{\omega} t + \dots + b_n \sin n\bar{\omega} t$$

$p(t)$ s'exprime encore :

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \bar{\omega}_n t + b_n \sin \bar{\omega}_n t) \quad (\text{II. 74})$$

Où l'excitation harmonique : $\bar{\omega}_n = n \frac{2\pi}{T_p}$

Les coefficients d'amplitude harmonique peuvent être évalués à l'aide des expressions :

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) dt \quad (\text{II. 74a})$$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \cos \bar{\omega}_n t dt = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \cos n \frac{2\pi}{T_p} t dt \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{II. 74b})$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \sin \bar{\omega}_n t dt = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \sin n \frac{2\pi}{T_p} t dt \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{II. 74c})$$

II.5.1.1 Réponse d'un système non amortie à une excitation périodique

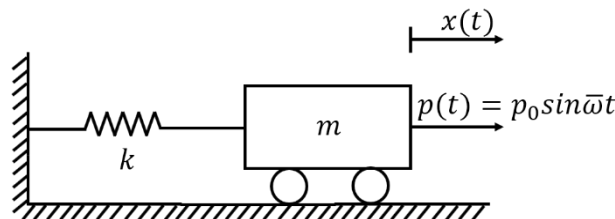


Figure II-15. Système non amortie à une excitation périodique.

Nous souhaitons trouver la réponse en régime permanent. Tout comme pour l'excitation harmonique, la réponse d'un système linéaire à une force périodique peut être déterminée en combinant les réponses aux termes d'excitation individuels dans la série de Fourier.

La réponse totale de la vibration forcée d'un système non amorti est donnée :

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)} \sin \bar{\omega} t \quad (\text{II. 75})$$

Mouvement transitoire + Mouvement permanente

La réponse totale du système à une excitation périodique dépend :

- Chargement harmonique de fréquence $\bar{\omega}$ et d'amplitude a_n et b_n
- La composante permanente de chaque terme en sinus et en cosinus :
 - Terme en sinus : $b_n \sin \bar{\omega}_n t \rightarrow x(t) = \frac{b_n}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)} \sin \bar{\omega}_n t$
 - Terme en cosinus : $p(t) = a_n \cos \bar{\omega}_n t \rightarrow x(t) = \frac{a_n}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)} \cos \bar{\omega}_n t$
- Le terme constant et le déplacement statique : $p(t) = a_0 \rightarrow x(t) = \frac{a_0}{k}$

La réponse périodique totale (permanente) de la structure non amortie peut alors être exprimée comme suit :

$$x(t) = \frac{1}{k} \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(1 - (\beta_n)^2)} \right] (a_n \cos \bar{\omega}_n t + b_n \sin \bar{\omega}_n t) \right\} \quad (\text{II. 76})$$

Où : $\beta_n = n \frac{\bar{\omega}}{\omega} = n \beta_0 \rightarrow \beta_n = n \beta_0$

Un chargement périodique arbitraire exprimé en série de Fourier comprend :

- Une force constante représentée par le coefficient a_0
- Une série de chargement harmonique de fréquence $\bar{\omega}_n$ et d'amplitude a_n et b_n

II.5.1.2 Réponse d'un système amorti à une excitation périodique

$$c \neq 0 ; p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \bar{\omega}_n t + b_n \sin \bar{\omega}_n t)$$

Le terme en sinus :

$$\begin{aligned} x_{ns} &= \frac{b_n}{k} \frac{1}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} (\sin \bar{\omega}_n t - \theta) \\ &= \frac{b_n}{k} \frac{1}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} [(1 - \beta_n^2) \sin \bar{\omega}_n t - (2\xi\beta_n) \cos \bar{\omega}_n t] \end{aligned} \quad (\text{II. 77})$$

Le terme en cosinus :

De la même manière :

$$x_{nc} = \frac{a_n}{k} \frac{1}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} [(1 - \beta_n^2)\cos \bar{\omega}_n t + (2\xi\beta_n)\sin \bar{\omega}_n t] \quad (\text{II. 78})$$

La réponse totale permanente donnée par :

$$x(t) = \frac{1}{k} \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} \right] ([2\xi a_n \beta_n + b_n(1 - \beta_n^2)] \sin \bar{\omega}_n t + [a_n(1 - \beta_n^2) - 2\xi b_n \beta_n] \cos \bar{\omega}_n t) \right\} \quad (\text{II. 79})$$

Forme exponentielle de la solution par série de Fourier :

Les équations relatives aux séries de Fourier peuvent également s'écrire sous forme exponentielle en substituant aux fonctions trigonométriques les expressions exponentielles suivantes :

$$\sin x = \frac{1}{2}i(e^{ix} - e^{-ix}) ; \cos x = \frac{1}{2}i(e^{ix} + e^{-ix})$$

Le résultat devient :

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i\bar{\omega}_n t} \quad (\text{II. 80})$$

Où :

$$C_n = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) e^{-i\bar{\omega}_n t} dt \quad (\text{II. 80a})$$

II.5.2 Réponse à un chargement impulsive :

Une charge impulsive consiste à une **impulsion** unique semblable à la figure, elle est généralement de **courte durée** (le choc).

La réponse maximum à un chargement impulsive sera atteinte **dans un coup de temps court**, avant que les forces d'amortissement n'aient le temps d'absorber une énergie conséquente, pour cette raison ont considéré que la **réponse est non amortie**.

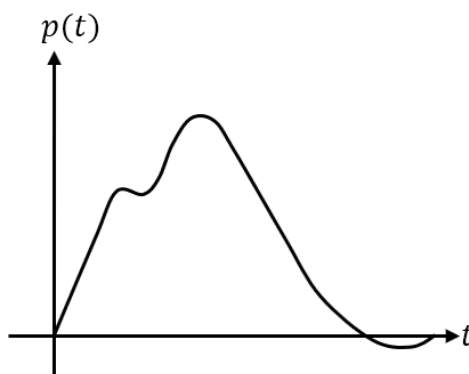


Figure II-16. Chargement impulsive quelconque.

a. Impulsion rectangulaire :

Certaines charges impulsives peuvent être représentées par une fonction analytique simple (Figure II-17).

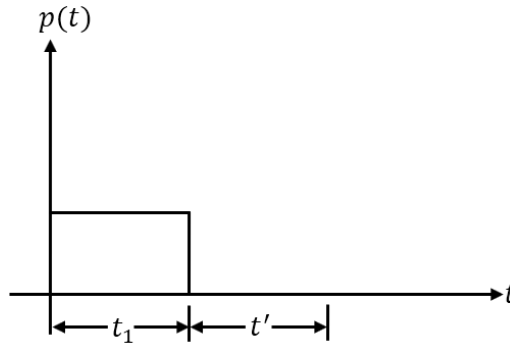


Figure II-17. Impulsion rectangulaire.

La réponse sera divisée en deux phases :

- Phase I : chargement
- Phase II : vibration libre

Phase I : charge appliquée de manière instantanée constante appelons Echelon.

Pour $0 \leq t \leq t_1$

$$\begin{aligned} \begin{cases} m\ddot{x} + (c\dot{x} = 0) + kx = p(t) \\ x(t) = x_c(t) + x_p(t) \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} x_c(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \\ x_p(t) = \frac{p_0}{k} \end{cases} \\ &\rightarrow x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{p_0}{k} \end{aligned} \quad (\text{II. 81})$$

On tire de ce résultat la solution générale avec les constantes de vibration libre calculée pour satisfaire les conditions initiales :

$x(t = 0) = 0$; $\dot{x}(t = 0) = 0$ et on remplace dans l'expression on obtient :

$$x(t) = \frac{p_0}{k} (1 - \cos \omega t_1) \quad (\text{II. 82})$$

Phase II:

$\begin{cases} t \geq t_1 \\ t' = t - t_1 \end{cases}$ le système est en vibration libre $x(t') = A \sin \omega t' + B \cos \omega t'$

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0(t_1)}{\omega} \sin \omega t + x_0(t_1) \cos \omega t \quad (\text{II. 83})$$

Le chargement de plus courte durée, la réponse maximum se produira pendant la vibration libre dans la phase II si le temps $\frac{t_1}{T} > \frac{1}{2}$ (il se produira exactement à la fin de la phase I), dans ce cas le facteur d'amplification dynamique $D_{max} = 2$.

$$D_{max} = \frac{x_{max}}{\frac{p_0}{k}} \quad (II.84)$$

$$x_{max} = \left[\left(\frac{\dot{x}_0(t_1)}{\omega} \right)^2 + (x_0(t_1))^2 \right]^{1/2} \quad (II.84a)$$

Où :

$$x_0(t_1) = \frac{p_0}{k} (1 - \cos \omega t_1) ; \dot{x}(t_1) = \frac{p_0}{k} (\omega \sin \omega t_1) ; \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\begin{aligned} x_{max} &= \frac{p_0}{k} \left[\left(\frac{\omega \sin \omega t_1}{\omega} \right)^2 + (1 - \cos \omega t_1)^2 \right]^{1/2} = \frac{p_0}{k} (\sin^2 \omega t_1 + 1 + \cos^2 \omega t_1 - 2 \cos \omega t_1)^{1/2} \\ &= \frac{p_0}{k} (2 - 2 \cos \omega t_1)^{1/2} = \frac{p_0}{k} [2(1 - \cos \omega t_1)]^{1/2} = \frac{p_0}{k} \left[2 \left(1 - \cos 2\pi \frac{t_1}{T} \right) \right]^{1/2} \\ &= \frac{p_0}{k} [2(2 \sin^2 \pi \frac{t_1}{T})]^{1/2} = \frac{p_0}{k} (2 \sin \pi \frac{t_1}{T}) \end{aligned} \quad (II.84b)$$

$$D_{max} = \frac{x_{max}}{\frac{p_0}{k}} = 2 \sin \pi \frac{t_1}{T} \quad (II.84c)$$

La réponse maximale à l'impulsion rectangulaire varie comme une fonction sinus pour $0 \leq \frac{t_1}{T} \leq \frac{1}{2}$: $x_{max} \left(t_1 = \frac{T}{2} \right) = 2 \frac{p_0}{k}$

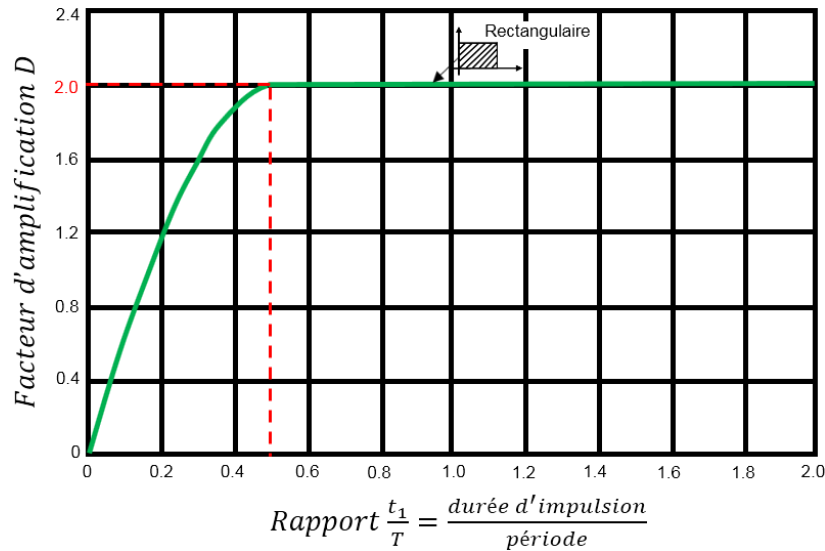


Figure II-18. Relation entre le facteur d'amplification dynamique et le rapport $\frac{t_1}{T}$ de l'impulsion rectangulaire.

Remarque :

Le facteur d'amplification dynamique varie quand le rapport $\frac{t_1}{T}$ comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$.

b. Impulsion triangulaire :

La charge d'impulsion à analyser en détail est l'impulsion triangulaire décroissante représentée sur la Figure II-19.

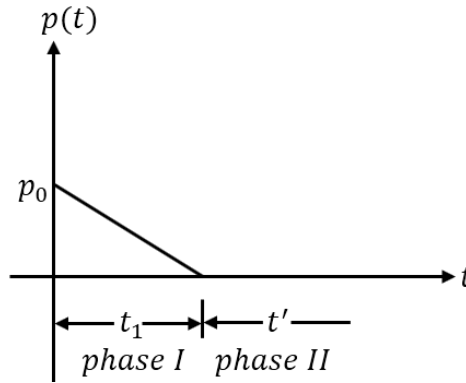


Figure II-19. Impulsion triangulaire décroissante.

Phase I: $x(t) = x_c(t) + x_p(t)$

La charge au cours de cette phase est de $p_0(1 - \frac{t}{t_1})$ pour laquelle il est facile de démontrer que la solution particulière de l'équation de mouvement est :

$$x_p(t) = \frac{p(t)}{k} = \frac{p_0}{k} \left(1 - \frac{t}{t_1}\right) \quad (\text{II. 85})$$

En combinant de cette solution avec la solution complémentaire et en évaluant ses constantes, supposant les conditions initiales nulles (système initialement au repos), on trouve :

$$A = -\frac{p_0}{k} \text{ et } B = \frac{p_0}{\omega k t_1}$$

$$\rightarrow x(t) = \frac{p_0}{k} \left[\frac{\sin \omega t}{\omega t_1} - \cos \omega t - \frac{t}{t_1} + 1 \right] \quad (\text{II. 86})$$

Phase II : la réponse dans cette phase, on le retrouve de la même manière que dans les cas précédents à la fin de la phase I ($t = t_1$) :

$$x(t_1) = \frac{p_0}{k} \left[\frac{\sin \omega t_1}{\omega t_1} - \cos \omega t_1 \right] \quad (\text{II. 87})$$

Elles peuvent reportée dans l'équation :

$$x(t) = \frac{\dot{x}(t_1)}{\omega} \sin \omega t + x(t_1) \cos \omega t \quad (\text{II. 88})$$

Pour obtenir la réponse en vibration de la phase II.

La réponse maximale se trouve dans la phase II où $\frac{t_1}{T} < 0.4$

c. Impulsion en forme sinusoïdale :

Considérons l'impulsion d'une seule onde sinusoïdale illustrée à la Figure II-20. La réponse à une telle impulsion sera divisée en deux phases comme illustré, la première correspondant à la phase de vibration forcée dans l'intervalle pendant lequel la charge agit et la seconde correspondant à la phase de vibration libre qui suit.

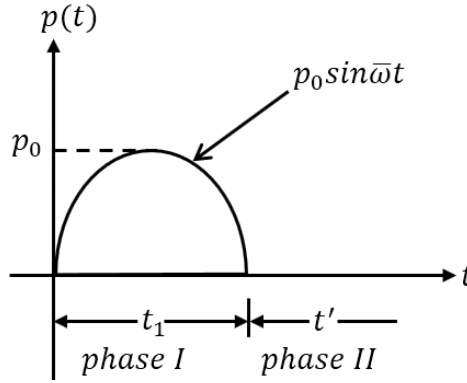


Figure II-20. Impulsion en forme sinusoïdale.

Phase I : Au cours de cette phase, la structure est soumise à un chargement harmonique d'une seule onde demi-sinusoïdale, initié du repos, la réponse non amortie y compris le terme transitoire et le terme permanent, est donné par la simple expression de la charge harmonique :

Pour $0 \leq \frac{t}{t_1} \leq 1 \rightarrow 0 \leq t \leq t_1$

$$x(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)} \sin \bar{\omega} t - \beta \sin \omega t \quad (\text{II. 89})$$

Phase II : Le mouvement de vibration libre qui se produit pendant cette phase, $t \geq t_1$, dépend du déplacement $x(t_1)$ et de la vitesse $\dot{x}(t_1)$ existant à la fin de la phase I.

$$x(t) = \frac{\dot{x}(t_1)}{\omega} \sin \omega t + x(t_1) \cos \omega t \quad (\text{II. 90})$$

Où la nouvelle variable $t' = t - t_1$.

L'amplitude de la réponse dynamique qui résulte de la charge impulsive dépend du rapport entre la durée de la charge et la période de vibration propre de la structure le facteur de réponse pour $\frac{t_1}{T} = \frac{1}{2}$ $\beta = \frac{3}{4}$ est :

$$D = \frac{x(t)}{\frac{p_0}{k}} \quad (\text{II. 91})$$

II.5.3 Spectre de réponse ou spectre de choc

D'après les résultats précédents on voit que la réponse maximale produite dans une structure non amortie à un degré de liberté par une forme donnée de chargement impulsif, ne dépend que du rapport

$\frac{t_1}{T}$ entre la durée de l'impulsion et la période propre (naturelle) de la structure. Il est utile de tracer le facteur d'amplification dynamique en fonction de $\frac{t_1}{T}$ pour diverses formes de chargement impulsif.

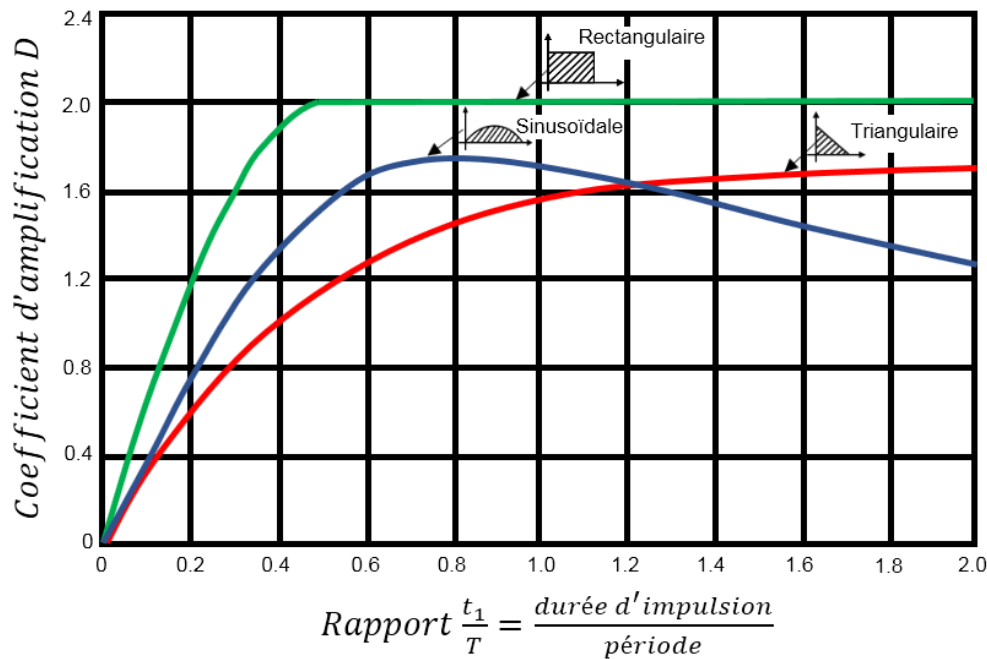


Figure II-21. Spectres de déplacement-réponse (spectres de choc) pour trois types d'impulsions.

Exercice :

Utilisons le spectre de choc pour évaluer la réponse maximale d'une structure à une charge impulsive, le système de la Figure II-22 représente un bâtiment à un étage soumis à une charge d'explosion triangulaire. Pour le poids et la rigidité donnés de cette structure.

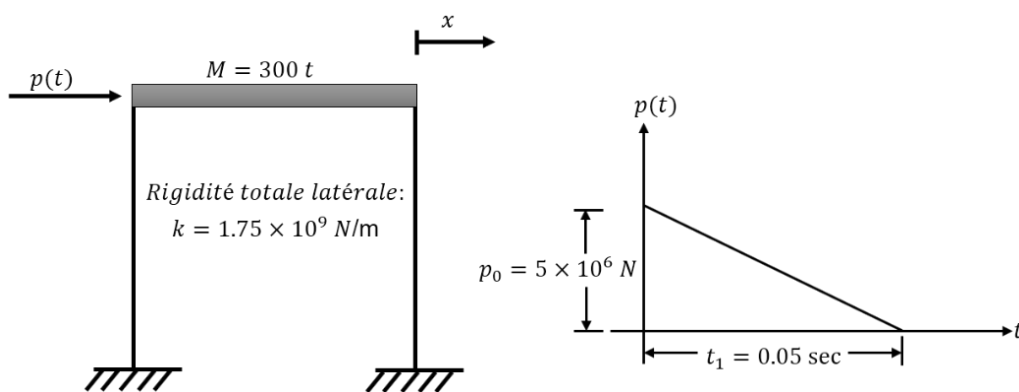


Figure II-22. Bâtiment soumis à une explosion triangulaire.

Solution :

La réponse maximale est donnée par :

$$x_{\max} = D_{\max} \frac{p_0}{k}$$

La détermination de D_{max} dépend de la valeur de $\frac{t_1}{T}$.

La période naturelle du bâtiment est :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{300 \times 10^3}{1.75 \times 10^9}} = 0.082 \text{ sec}$$

Le rapport de la durée de l'impulsion à la période naturelle devient :

$$\frac{t_1}{T} = \frac{0.05}{0.082} = 0.610$$

Selon la courbe la valeur de facteur d'amplification dynamique maximale est : $D_{max} = 1.33$

Donc le déplacement maximum sera :

$$x_{max} = D_{max} \frac{p_0}{k} = 1.33 \times \frac{5 \times 10^6}{1.75 \times 10^9 \times 10^{-2}} = 0.38 \text{ cm}$$

La force (résistance) élastique totale des poteaux développés est :

$$f_{el} = kx_{max} = 1.75 \times 10^9 \times 0.38 \times 10^{-2} = 6.65 \times 10^6 \text{ N}$$

II.5.4 Réponse à une excitation dynamique quelconque

-Système sous une impulsion de courte durée :

Considérons un chargement dynamique quelconque pendant la fraction de temps $d\tau$, qu'il fait subir à la structure une impulsion de courte durée, la solution de l'équation du mouvement pour un système linéaire à un degré de liberté soumis à une force dynamique quelconque $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$ dans le but de développer une méthode générale pour résoudre cette équation sous charge dynamique quelconque. On considère tout d'abord la réponse du système sous une impulsion de courte durée (impact).

Si la durée de l'impact est très courte relativement à la période naturelle du système, on peut considérer alors l'impulsion comme charge ponctuelle c'est-à-dire le système n'a pas le temps de réagir durant l'intervalle de temps t_1 .

La relation fondamentale reliant l'impulsion à la quantité du mouvement (interaction sol-structure) :

$$m\ddot{x}(t) = m \frac{d\dot{x}}{dt} = F(t) \quad (\text{II. 92a})$$

$$d\dot{x} = \frac{F(t)}{m} dt \quad (\text{II. 92b})$$

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{m} \int_0^t F(t) dt \quad (\text{II. 92c})$$

La solution peut se formuler :

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t \quad (\text{II. 93})$$

$$x(t) = \frac{\dot{x}(t_1)}{\omega} \sin \omega t = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(t) \sin \omega t dt \quad (\text{II. 94})$$

C'est la solution du système libre non amortie.

On peut représenter toute charge dynamique arbitraire par une succession d'impulsion (système linéaire), comme illustré sur la figure ci-dessous le chargement $F(\tau)$ agissant à l'instant $t = \tau$.

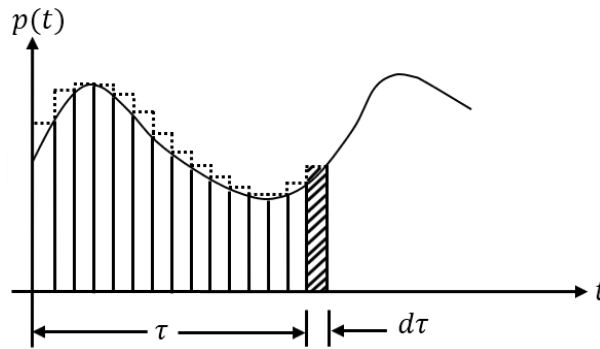


Figure II-23. Principe d'obtention de l'intégrale de Duhamel (système non amortie).

La charge dynamique arbitraire représentée par une succession d'impulsion rectangulaire. Ce chargement agissant pendant l'intervalle de temps $d\tau$ représente une impulsion de très courte durée $F(\tau) d\tau$ sur la structure, la réponse produite par cette impulsion est exactement égale à :

$$dx(t) = \frac{F(\tau)d\tau}{m\omega} \sin \omega(t - \tau) \quad (\text{II. 95})$$

Dans cette expression, le terme $dx(t)$ représente la réponse en fonction du temps de l'impulsion différentielle pendant toute la durée $t \geq \tau$; ce n'est pas le changement de x pendant un intervalle de temps dt .

La réponse totale de ce système sera obtenue en additionnant toutes les réponses différentielles développées au cours de l'historique de chargement (c'est-à-dire en intégrant la réponse $dx(t)$) comme suit :

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad t \geq 0 \quad (\text{II. 96})$$

Cette expression, généralement connue sous le nom **d'équation intégrale de Duhamel**, peut être utilisée pour évaluer la réponse d'un système non amorti à toute forme de chargement dynamique $F(t)$.

Exercice :

Considérons la réponse de la structure représentée sur la figure ci-dessous à la charge impulsive indiquée. Déterminer l'effort élastique max.

Donnée : $k = 90 \times 10^2 \text{ kN/m}$; $m = 1000 \text{ t}$; $p_0 = 2.5 \times 10^5 \text{ N}$

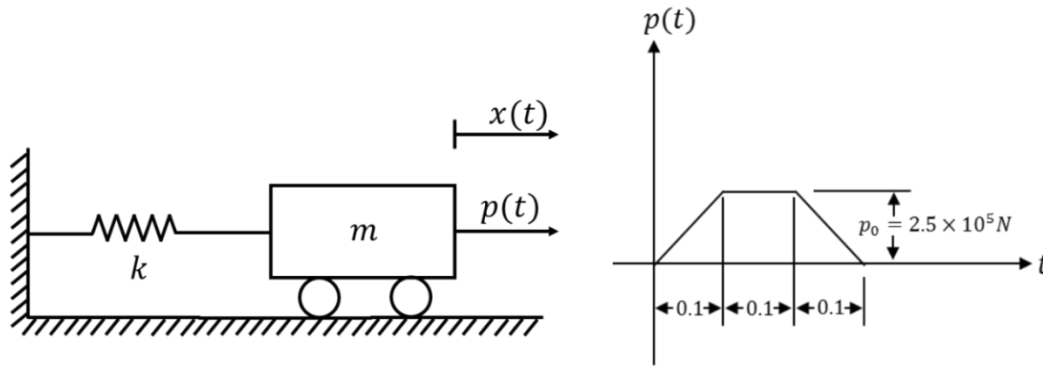


Figure II-24. Chargement impulsive de courte durée.

Solution :

L'effort élastique max est donnée par :

$$f_{el \max} = kx_{\max}$$

La réponse totale de ce système est :

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \left(\int_0^{t_1} p(t) dt \right) \sin \omega \bar{t}$$

La réponse maximale obtenu si et seulement si $\sin \omega \bar{t} = 1$

Alors :

$$\int_0^{t_1} p(t) dt = \frac{(0.3 + 0.1) \times 2.5 \times 10^5}{2} = 5 \times 10^4 \text{ N}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{90 \times 10^2 \times 10^3}{1000 \times 10^3}} = 3 \text{ rad/sec}$$

$$x_{\max} = \frac{1}{1000 \times 10^3 \times 3} \times 5 \times 10^4 = 1.667 \times 10^{-2} \text{ m}$$

Donc :

$$f_{el \max} = 90 \times 10^2 \times 10^3 \times 1.667 \times 10^{-2} = 1.5 \times 10^5 \text{ N}$$

II.5.4.1 Cas où la charge est directement appliquée à la masse

- Système initialement non au repos et non amortie ($x_0 \neq 0$; $\dot{x}_0 \neq 0$; $c = 0$), la solution devient :

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t + \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (\text{II. 97})$$

- Système initialement au repos et non amortie ($x_0 = 0$; $\dot{x}_0 = 0$; $c = 0$), la solution devient :

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (\text{II. 98})$$

- Système initialement non au repos et amortie ($x_0 \neq 0$; $\dot{x}_0 \neq 0$; $c \neq 0$), la solution devient :

$$x(t) = \left[\frac{\dot{x}_0 + \xi \omega x_0}{\omega_D} \sin \omega_D t + x_0 \cos \omega_D t \right] e^{-\xi \omega t} + \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) \sin \omega_D(t - \tau) e^{-\xi \omega \tau} d\tau \quad (\text{II. 99})$$

II.5.4.2 Cas où le support est excité

Il faut présider à la recherche de la force effective qui va remplacer $x_s(t)$; $\dot{x}_s(t)$; $\ddot{x}_s(t)$.

En cas du mouvement de support :

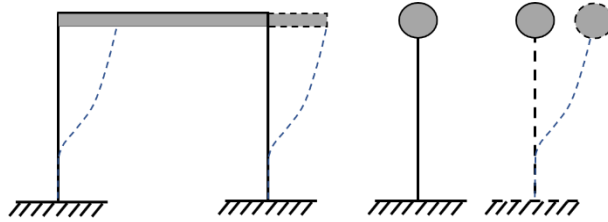


Figure II-25. Mouvement de support.

Equation différentielle du mouvement en fonction du déplacement relatif (II.52):

$$\sum F = 0 \rightarrow F_I + F_{Is} + F_c + F_k = 0$$

$$m\ddot{x}_r + m\ddot{x}_s + c\dot{x}_r + kx_r = 0$$

$$m\ddot{x}_r + c\dot{x}_r + kx_r = -m\ddot{x}_s = p_{eff}^R(\tau) \rightarrow \text{Force effective relative}$$

D'après l'intégrale de Duhamel ($c = 0$) :

$$x_R(t) = \frac{\dot{x}_{0R}}{\omega} \sin \omega t + x_{0R} \cos \omega t + \frac{1}{m\omega} \int_0^t p_{eff}^R(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (\text{II. 100})$$

Equation différentielle du mouvement en fonction du déplacement totale (II.55):

$$m(\ddot{x}_T - \ddot{x}_s) + m\ddot{x}_s + c(\dot{x}_T - \dot{x}_s) + k(x_T - x_s) = 0$$

$$m\ddot{x}_T + c\dot{x}_T + kx_T = c\dot{x}_s + kx_s = p_{eff}^T(\tau) \quad (\text{II. 101})$$

L'intégrale de Duhamel dans ce cas devient ($c = 0$) :

$$x_T(t) = \frac{\dot{x}_{0T}}{\omega} \sin \omega t + x_{0T} \cos \omega t + \frac{1}{m\omega} \int_0^t p_{eff}^T(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (\text{II. 102})$$

II.5.5 Spectre de réponse sismique

Le spectre de réponse dans ce qui a précédé nous de vous supposer un système dans le temps comme étant défini c'est-à-dire les paramètres comme m , k et c étaient supposés connus et on déterminait la réponse du système à une charge donnée pour des éventuels prédimensionnement des éléments résistants d'une construction.

Le problème qui se pose à l'ingénieur est celui de déterminer un ou plusieurs paramètres (m , k et c) d'un système afin de limiter une certaine réponse (déplacement, vitesse, contrainte...etc.), le spectre de réponse est une caractéristique fondamentale d'un accélérogramme en ce qui concerne la réponse maximale qu'il produit sur un système linéaire à un degré de liberté et c'est un tracé des réponses maximale (déplacement, vitesse, accélération) à une excitation sismique en fonction de la période de vibration naturelle T du système, ou d'un autre paramètre tel que la pulsation propre ω ou la fréquence propre f . Chacun de ces tracés est destiné à des systèmes à un seul degré de liberté ayant un rapport d'amortissement fixe ξ , et plusieurs de ces tracés pour différentes valeurs de ξ sont inclus pour couvrir l'ensemble des valeurs d'amortissement rencontrées dans les structures réelles. Que ce soit la réponse maximale est tracée en fonction f ou T est une question de préférence personnelle. Nous avons choisi ce dernier parce que les ingénieurs préfèrent utiliser la période naturelle plutôt que la fréquence naturelle car la période de vibration est un concept plus familier et intuitivement attrayant.

À cet effet, la réponse d'un simple oscillateur (Figure II-25), s'est révélée inestimable. La réponse de déplacement relatif de cette structure à une seule composante spécifiée de l'accélération du sol $\ddot{x}_s(t)$ peut être exprimée dans le domaine temporel en utilisant l'intégrale de Duhamel, s'il est noté que, $-m \ddot{x}_s(t) = p_{eff}(t)$; Donc,

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t -m \ddot{x}_s(\tau) \sin \omega_D(t - \tau) e^{-\xi \omega(t - \tau)} d\tau \quad (\text{II. 103})$$

Lorsque la différence entre la pulsation propre amortie ω_D et la pulsation propre non amortie ω est négligée, généralement pour les petits rapports d'amortissement des structures réelles (disons $\xi < 20\%$), et lorsqu'il est noté que le signe négatif n'a aucune signification réelle en ce qui concerne l'excitation sismique, cette équation peut être réduite à :

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t \ddot{x}_s(\tau) \sin \omega(t - \tau) e^{-\xi \omega(t - \tau)} d\tau \quad (\text{II. 104})$$

La première dérivée de cette l'équation, donne la vitesse relative correspondante :

$$\dot{x}(t) = \int_0^t \ddot{x}_s(\tau) \cos \omega(t - \tau) e^{-\xi \omega(t-\tau)} d\tau - \xi \int_0^t \ddot{x}_s(\tau) \sin \omega(t - \tau) e^{-\xi \omega(t-\tau)} d\tau \quad (\text{II. 104a})$$

De plus, en remplaçant ces deux équations (II.104) et (II.104a) dans l'équation du mouvement à vibration forcée, écrite sous la forme :

$$\ddot{x}_T(t) = -2\omega\xi\dot{x}(t) - \omega^2x(t)$$

On obtient la relation d'accélération totale :

$$\ddot{x}_T(t) = \omega(2\xi^2 - 1) \int_0^t \ddot{x}_s(\tau) \sin \omega(t - \tau) e^{-\xi \omega(t-\tau)} d\tau - 2\omega\xi \int_0^t \ddot{x}_s(\tau) \cos \omega(t - \tau) e^{-\xi \omega(t-\tau)} d\tau \quad (\text{II.105})$$

Pour le prédimensionnement des éléments résistant d'une structure on s'intéresse généralement aux valeurs maximales absolues de la réponse donnée par ces équations. Il existe plusieurs types de spectres de réponse qui on définit :

- Spectre de déplacement relatif (déplacement spectrale) : $s_D = x_{max}$
- Spectre de vitesse relative (vitesse spectrale) : $s_V = \dot{x}_{max}$
- Spectre d'accélération relatif : $s_A = \ddot{x}_{max}$
- Spectre de déplacement absolue : $s_{DT} = (x_r + x_s)_{max}$
- Spectre de vitesse absolue : $s_{VT} = (\dot{x}_r + \dot{x}_s)_{max}$
- Spectre d'accélération absolue (accélération spectrale) : $s_{AT} = (\ddot{x}_r + \ddot{x}_s)_{max}$

Remarque :

Les spectres les plus utilisés en génie parasismique sont les spectres relatifs, de déplacement et de vitesse (s_D, s_V) et le spectre d'accélération absolue (s_{AT}).

Propriétés des spectres de réponses sismique :

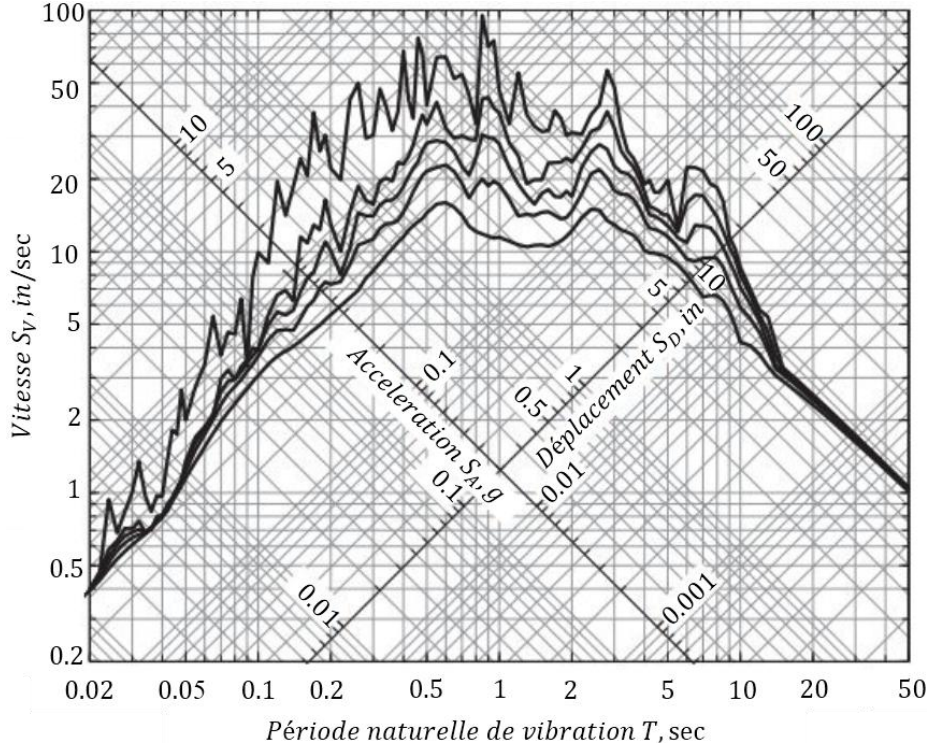
Les spectres de réponses possèdent des propriétés suivantes :

- Ils donnent des valeurs de réponses maximales d'un système à un degré de liberté soumis à un séisme.
- Ils donnent des maximales de réponse à chaque mode.
- Ils indiquent la distribution en fréquences de l'énergie sismique dans le sens que la réponse d'un système à un degré de liberté est amplifiée quand l'énergie sismique se situe près de la fréquence naturelle.

Les spectres illustrés dans la Figure II-26 représentent les valeurs absolues obtenues pour une excitation sismique en fonction de la période naturelle enregistrés à un endroit de la Vallée impériale (Californie) du 18 mai 1940.

Les trois grandeurs spectrales sont reliées entre eux, on peut écrire la relation suivante :

$$s_V = \frac{s_A}{\omega} = \omega s_D \text{ ou } s_V = \frac{T}{2\pi} s_A = \frac{2\pi}{T} s_D \quad (\text{II.106})$$



**Figure II-26. Spectres de réponse pour le séisme d'El Centro, en Californie, 18 mai 1940 ;
 $\xi = 0, 2, 5, 10, \text{ and } 20\%$.**

Pour comprendre le fonctionnement du graphe tripartite, on considère la variation au $\log_{10} S_V$ en fonction du $\log_{10} \omega$ pour des valeurs constantes de s_D et s_A .

$$s_D = \frac{s_V}{\omega} = C_1 \quad (\text{II.107})$$

$$s_A = \omega^2 s_D = \omega s_V = C_2 \quad (\text{II.108})$$

Alors,

$$\log_{10} C_1 = \log_{10} S_V - \log_{10} \omega$$

$$\log_{10} S_V = \log_{10} C_1 + \log_{10} \omega$$

$$d(\log_{10} S_V) = d(\log_{10} C_1) + d(\log_{10} \omega)$$

$$\frac{d(\log_{10} S_V)}{d(\log_{10} \omega)} = 1$$

Par ailleurs,

$$\log_{10} C_2 = \log_{10} S_V + \log_{10} \omega$$

$$\log_{10} S_V = \log_{10} C_2 - \log_{10} \omega$$

$$d(\log_{10} S_V) = d(\log_{10} C_2) - d(\log_{10} \omega)$$

$$\frac{d(\log_{10} S_V)}{d(\log_{10} \omega)} = -1$$

Donc, le résultat indique que la droite à $+45^\circ$ sur un graphe tripartite représente un spectre de déplacement relatif s_D constante, et la droite à -45° sur le même graphe représente une accélération spectrale s_A constante.

On peut voir que les spectres de réponses sont très irréguliers malgré tout, les spectres à la forme générale d'un trapézoïde (forme d'une tante), cette forme est une caractéristique des spectres de réponse sismique et s'explique physiquement ainsi :

- Pour les basses période naturelles, l'accélération absolue maximale est égale à l'accélération maximale du sol alors que le déplacement relatif tend vers zéro.
- Pour les hautes périodes naturelles, le déplacement relatif maximal est égal au déplacement maximal du sol alors que l'accélération absolue tend vers zéro.
- Pour les périodes naturelles intermédiaires, le déplacement relatif, la vitesse relatif et l'accélération sont amplifiés.

II.6 Conclusion

Les oscillations libres des systèmes à un seul degré de liberté offrent une base indispensable à l'analyse dynamique des structures. Les expressions analytiques obtenues pour les réponses en déplacement, vitesse et accélération permettent d'évaluer le comportement vibratoire sous diverses conditions d'amortissement. L'étude des phénomènes de résonance, de transmissibilité et d'isolation vibratoire met en évidence les mécanismes d'amplification ou d'atténuation des mouvements, tandis que l'introduction des spectres de réponse et de l'intégrale de Duhamel prépare à l'analyse de réponses sous excitations complexes, comme les séismes. Ces outils constituent les briques de base pour aborder la dynamique des structures à plusieurs degrés de liberté dans les chapitres ultérieurs.

III. Systèmes à plusieurs degrés de liberté

III.1 Introduction

Les degrés de liberté d'un système peuvent être représentés d'une part par le déplacement d'un nombre fini de points requises pour exprimer les forces d'inertie se développant dans celui-ci, ces déplacements sont évalués en un nombre de points de la structure, appelés nœuds où sont concentrées les masses, ou d'autre part par l'introduction de coordonnées généralisées représentant les amplitudes d'un nombre spécifié de déformées.

La figure III-1 présente un exemple d'idéalisation d'une poutre simple par concentration de la masse pour limiter le nombre de degré de liberté. Ce système discret à n masse concentrées. Le mouvement de cette poutre sera supposé être défini par les déplacements verticaux $(y_1(t), y_2(t), \dots, y_i(t), \dots, y_n(t))$ d'un ensemble de points mesurés à partir de la position d'équilibre statique, cela s'applique également à tout type de structure.

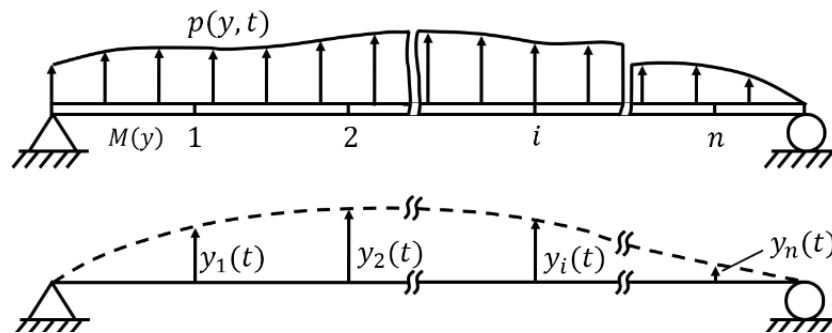


Figure III-1. Idéalisations d'une poutre simple par concentration de la masse.

Dans le cas d'un bâtiment à n étage (figure III-2) on suppose toujours ce qui suit :

- La masse est concentrée au niveau de chaque plancher
- Le déplacement latéral $x_i(t)$
- Le nombre de degré de liberté est égale au nombre d'étage du bâtiment

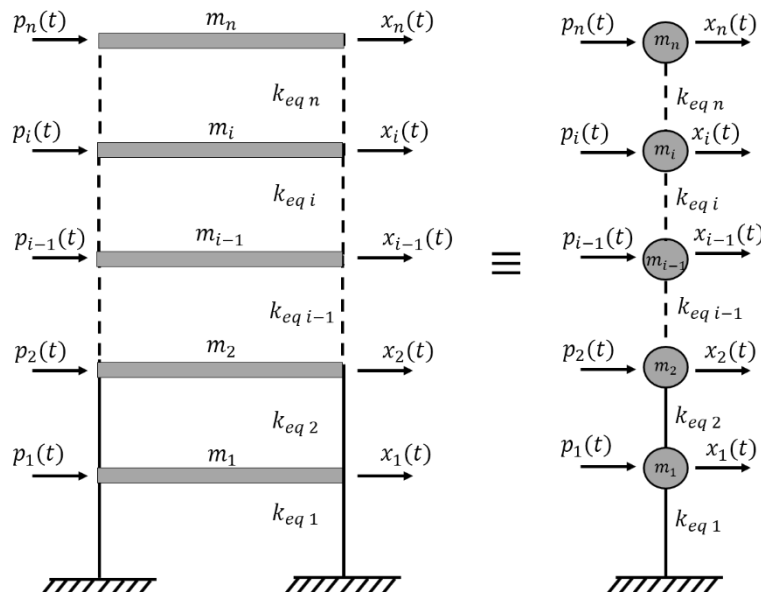


Figure III-2. Modélisation d'un bâtiment à n étage en masses concentrées.

III.2 Equation de l'équilibre dynamique

L'équation de mouvement d'un bâtiment à n étage (Figure III-2) s'exprime en écrivant l'équilibre des forces effectives associées à chaque degré de liberté. En Générale, on aura quatre types de forces à chaque nœud i :

- Force appliquée extérieure $p_i(t)$
- Forces résultant du mouvement : $\begin{cases} \text{Forces d'inertie } f_{Ii} \\ \text{Forces élastiques } f_{ki} \\ \text{Forces d'amortissement } f_{ci} \end{cases}$

L'équilibre général du système s'exprime, pour chaque degré de liberté i :

$$f_{Ii} + f_{ci} + f_{ki} = p_i(t) \quad (\text{III. 1})$$

La procédure est la même pour toutes les masse :

- Nœud 1 : $f_{I1} + f_{c1} + f_{k1} = p_1(t)$
- Nœud n : $f_{In} + f_{cn} + f_{kn} = p_n(t)$

ou lorsque les vecteurs de force sont représentés sous forme matricielle,

$$\{f_I\} + \{f_c\} + \{f_k\} = \{p(t)\}$$

$$f_I + f_c + f_k = p(t)$$

qui est l'équivalent de l'équation du mouvement à un seul degré de liberté.

Chacune des forces résistantes (élastiques, d'amortissement ou d'inertie) s'exprime, de façon plus générale, à l'aide de coefficients d'influence traduisant la dépendance de la force en un point sur la valeur du mouvement de tous les autres points.

Matrice de rigidité :

En supposant que le principe de superposition est valide, et donc que le système est linéaire, la force élastique développée suivant le degré de liberté i s'exprime par :

$$f_{ki} = k_{i1}x_1 + k_{i2}x_2 + \dots = \sum_{j=1}^n k_{ij} x_j \quad (\text{III. 2a})$$

soit pour l'ensemble des degrés de liberté, sous la forme matricielle :

$$\{f_k\} = [k]\{x\} \quad (\text{III. 2b})$$

Le coefficient k_{ij} représente la force engendrée suivant le degré de liberté i par un déplacement unité imposé au degré de liberté j .

La matrice $[k]$ représentant l'ensemble des coefficients d'influence k_{ij} est la matrice symétrique de raideur du système (c'est-à-dire, $k_{ij} = k_{ji}$).

$$\begin{Bmatrix} f_{k1} \\ f_{k2} \\ \vdots \\ f_{kn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

Matrice d'amortissement :

En supposant que les forces d'amortissement sont d'origine visqueuse, et dépendent donc de la vitesse, on peut écrire de façon similaire :

$$f_{ci} = c_{i1}\dot{x}_1 + c_{i2}\dot{x}_2 + \dots = \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{x}_j \quad (\text{III. 3a})$$

soit sous forme matricielle :

$$\{f_c\} = [c]\{\dot{x}\} \quad (\text{III. 3b})$$

Les coefficients c_{ij} sont les coefficients de la matrice d'amortissement du système.

Le coefficient c_{ij} représente la force engendrée suivant le degré de liberté i par une vitesse unité imposée au degré de liberté j .

$$\begin{Bmatrix} f_{c1} \\ f_{c2} \\ \vdots \\ f_{cn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix}$$

Matrice de masse :

Finalement les forces d'inertie peuvent être exprimées de façon similaire :

$$f_{li} = m_{i1}\ddot{x}_1 + m_{i2}\ddot{x}_2 + \dots = \sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{x}_j \quad (\text{III. 4a})$$

soit sous forme matricielle :

$$\{f_i\} = [m]\{\ddot{x}\} \quad (\text{III. 4b})$$

La matrice des coefficients m_{ij} est la matrice de masse du système.

Le coefficient m_{ij} représente la force engendrée suivant le degré de liberté i par une accélération unité imposée au degré de liberté j . Tout comme la matrice de rigidité, la matrice de masse est symétrique (c.à.d., $m_{ij} = m_{ji}$).

$$\begin{Bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ \vdots \\ f_{in} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1j} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2j} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nj} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix}$$

En général, pour une idéalisation de masse forfaitaire, la matrice de masse est diagonale :

$$m_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j, m_{jj} = m_j \text{ si } i = j$$

Alors la matrice $[m]$ devient :

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & & & 0 \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m_n \end{bmatrix}$$

Regroupant les équations (III.2b), (III.3b) et (III.4b), l'équation d'équilibre dynamique du système s'écrit sous forme matricielle :

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{p(t)\}$$

Les matrices $[m]$, $[c]$ et $[k]$ ont pour dimensions $N \times N$, et les matrices $\{x\}$ et $\{p(t)\}$ pour dimensions $N \times 1$ où N représente le nombre de degrés de liberté du système (égal au nombre de nœuds multiplié par le nombre de déplacements possibles du nœud).

Matrice de flexibilité :

La matrice $[k]$ possède un inverse, appelée matrice de flexibilité :

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \check{f}_{11} & \check{f}_{12} & \cdots & \check{f}_{1n} \\ \check{f}_{21} & \check{f}_{22} & \cdots & \check{f}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \check{f}_{n1} & \check{f}_{n2} & \cdots & \check{f}_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{Bmatrix}$$

soit sous forme :

$$\{x\} = [\check{f}]\{p\} \quad (\text{III. 5})$$

Exemple : structure à 4 étages

On considère la structure représentée par la figure ci-dessous :

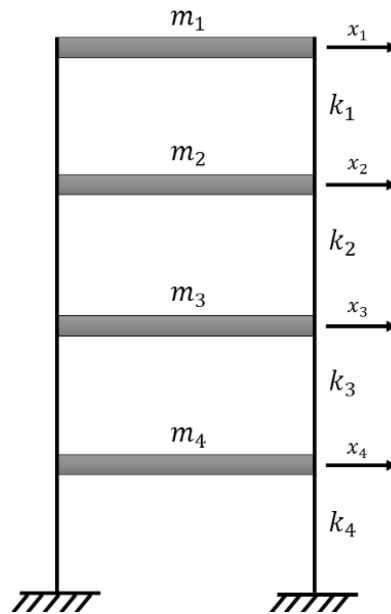


Figure III-3. Structure à 4 étages.

La matrice de masse de cette structure peut être déterminée en supposant que la masse entière est concentrée aux points où les déplacements de translation sont définis :

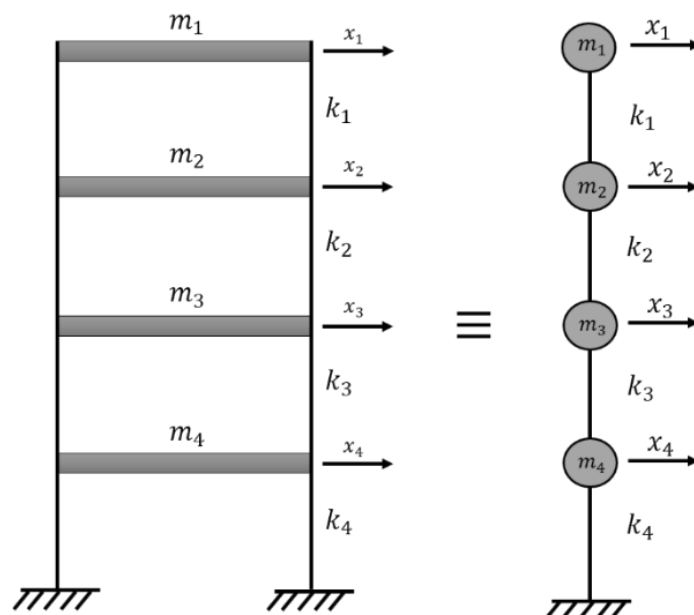


Figure III-4. Structure à 4 étages (a), modélisation brochette (b).

Donc, la matrice de masse est :

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité de cette structure peut être déterminée en appliquant successivement un déplacement unitaire à chaque étage et en évaluant les forces résultantes de l'étage, comme indiqué sur la Figure II-5 :

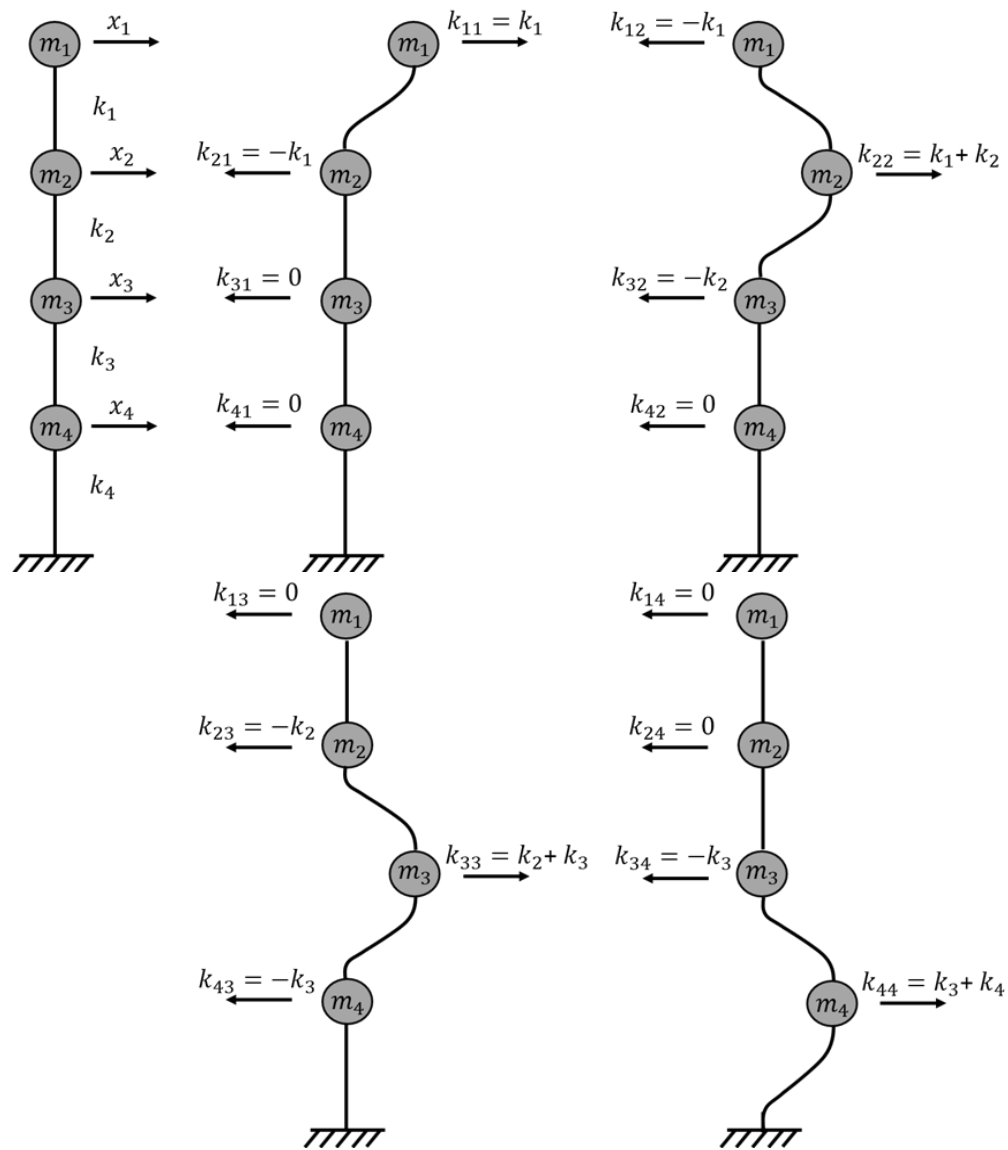


Figure III-5. Modélisation brochette de la structure (a), coefficient d'influence de rigidité.

Donc, la matrice de rigidité est :

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix}$$

La matrice de flexibilité est l'inverse de la matrice de rigidité peut être déterminée comme la montre la Figure II-6 :

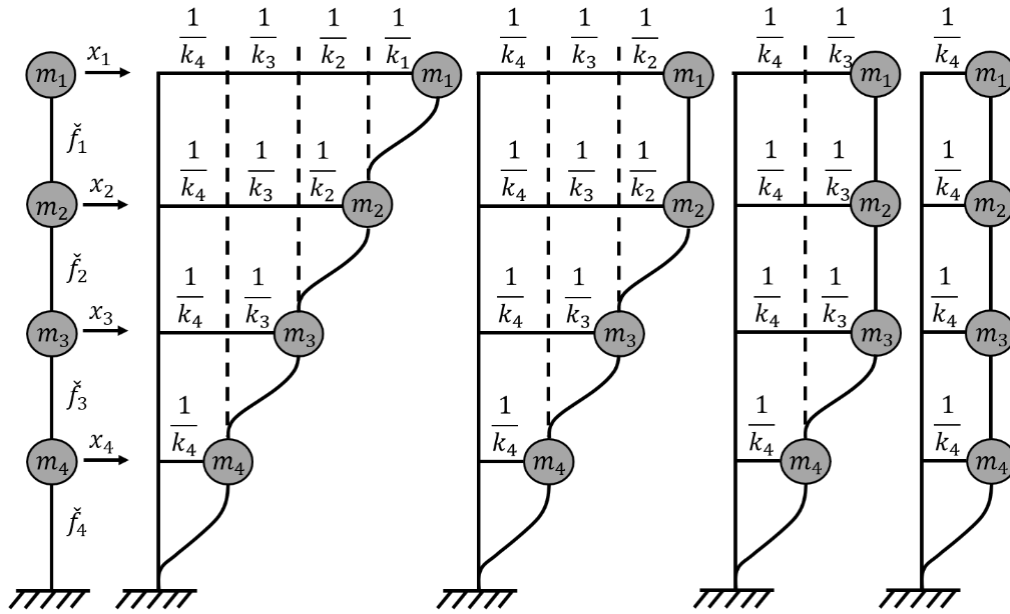


Figure III-6. Modélisation brochette de la structure (a), coefficient d'influence de flexibilité.

Donc, la matrice de flexibilité est :

$$[\check{f}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} & \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} & \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} & \frac{1}{k_4} \\ \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} & \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} & \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} & \frac{1}{k_4} \\ \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} & \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} & \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} & \frac{1}{k_4} \\ \frac{1}{k_4} & \frac{1}{k_4} & \frac{1}{k_4} & \frac{1}{k_4} \end{bmatrix}$$

Donc, l'équation du mouvement de ce système libre non amortie est :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = 0$$

Si en utilisant deuxième loi de Newton, l'équation du mouvement de ce système libre non amortie regroupe l'équation de chaque étage :

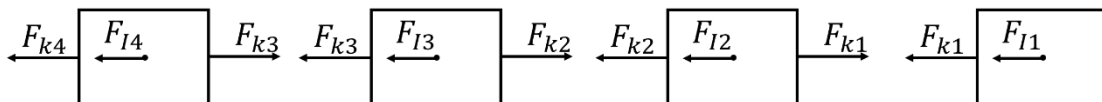


Figure III-7. Forces agissantes.

Selon la deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \rightarrow \begin{cases} \vec{F}_{I1} + \vec{F}_{k1} = \vec{0} \\ \vec{F}_{I2} + \vec{F}_{k1} + \vec{F}_{k2} = \vec{0} \\ \vec{F}_{I3} + \vec{F}_{k2} + \vec{F}_{k3} = \vec{0} \\ \vec{F}_{I4} + \vec{F}_{k3} + \vec{F}_{k4} = \vec{0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_{I1} + F_{k1} = 0 \\ F_{I2} - F_{k1} + F_{k2} = 0 \\ F_{I3} - F_{k2} + F_{k3} = 0 \\ F_{I4} - F_{k3} + F_{k4} = 0 \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_1(x_1 - x_2) + k_2(x_2 - x_3) = 0 \\ m_3 \ddot{x}_3 - k_2(x_2 - x_3) + k_3(x_3 - x_4) = 0 \\ m_4 \ddot{x}_4 - k_3(x_3 - x_4) + k_4 x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_1 x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_1 x_1 + (k_1 + k_2) x_2 - k_2 x_3 = 0 \\ m_3 \ddot{x}_3 - k_2 x_2 + (k_2 + k_3) x_3 - k_3 x_4 = 0 \\ m_4 \ddot{x}_4 - k_3 x_3 + (k_3 + k_4) x_4 = 0 \end{cases}$$

Donc, l'équation du mouvement de ce système sous forme matricielle est :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = 0$$

III.3 Conclusion

L'analyse des systèmes à plusieurs degrés de liberté constitue une étape fondamentale dans l'étude du comportement dynamique des structures réelles. À travers l'idéalisme de structures discrètes, les équations du mouvement ont été formulées en utilisant des matrices de masse, d'amortissement et de raideur.

La modélisation par concentration des masses permet de simplifier les calculs tout en conservant les caractéristiques dynamiques essentielles. Les équations matricielles ainsi obtenues traduisent l'interaction entre les différents degrés de liberté du système. L'utilisation de ces formulations permet d'accéder à une analyse plus précise des réponses vibratoires, que ce soit en régime libre ou forcé.

Les propriétés de symétrie et de linéarité des matrices facilitent le développement de méthodes numériques efficaces.

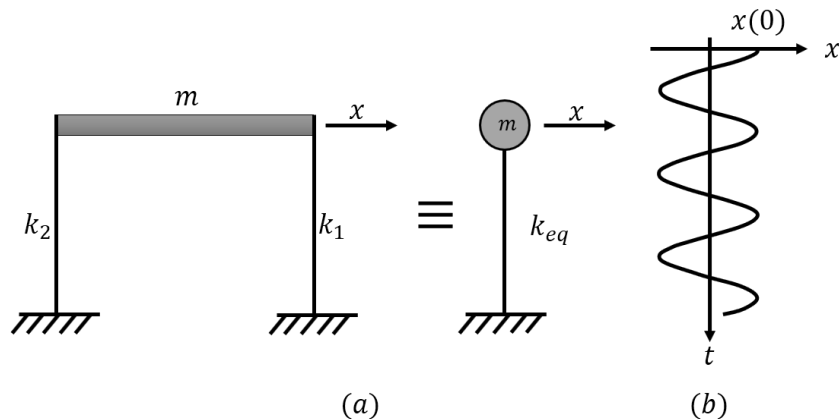
Cette base théorique est indispensable pour aborder les méthodes modales et l'analyse spectrale présentées dans les chapitres suivants.

IV. Vibrations libres des S.P.D.D.L

IV.1 Introduction

La vibration libre signifie que le mouvement d'un système n'est soumis à aucune excitation dynamique (force extérieure). Cette vibration se produit dans certaines conditions initiales de déplacement et/ou de vitesse.

Un SSDDL en vibration libre oscille à une seule fréquence et à une seule période propre avec laquelle le système vibre naturellement (Figure IV-1). Dans ce cas on peut décrire sa cinématique par le mouvement d'un seul point ou bien une seule déformée.



**Figure IV-1. Vibration libre d'un système non amorti due à un déplacement initial arbitraire :
(a) structure à un seul étage ; (2) l'historique des déplacements.**

Le problème qui se pose est dans le cas d'un système à N DDL, quelle est sa fréquence, sa période et son déplacement ?

IV.2 Analyse qualitative des vibrations libres des SPDDL

Exemple de vibrations libres d'un S2DDL :

La Figure IV-2 montre la vibration libre d'une structure à 2DDL, cette vibration est déclenchée par les déflexions illustrées par la courbe a de la Figure IV-2.a. Le mouvement résultant x_i des deux masses (plancher) est tracé sur la Figure IV-2.d en fonction du temps. Les formes déviées de la structure à des instants a, b et c sont représentées sur la Figure IV-2.b et la fonction harmonique $Z_n(t)$ est également tracé sur la Figure IV-2.c.

Comme il est illustrée sur la Figure IV-2, le mouvement de ce système est périodique mais il n'est pas harmonique et la fréquence du mouvement ne peut pas être définie.

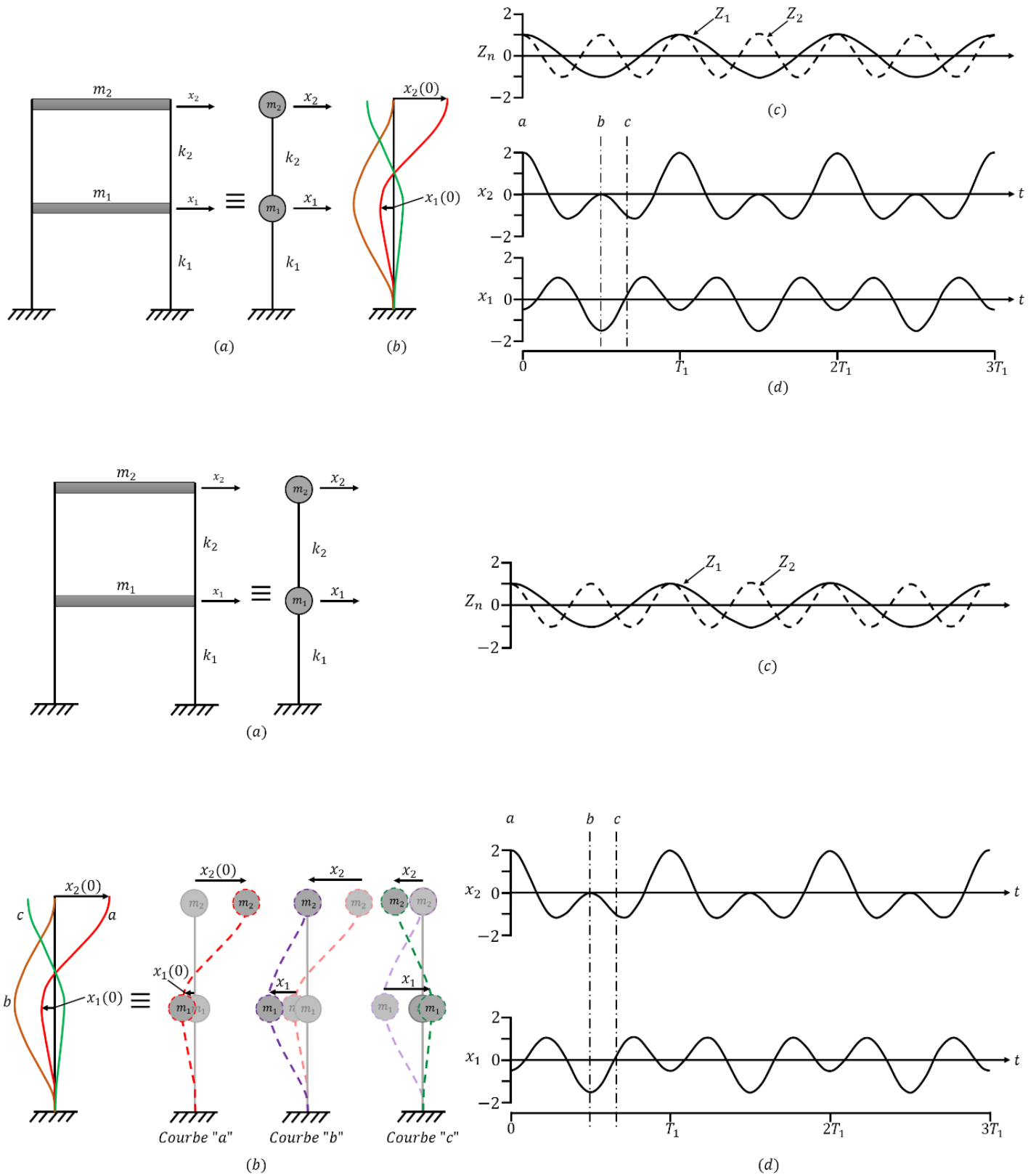


Figure IV-2. Vibration libre d'un système non amorti due à un déplacement initial arbitraire : (a) structure à deux étages; (b) des formes de déflexions aux instants a, b et c; (c) coordonnées modales $q_n(t)$; (d) l'historique des déplacements.

Les vibrations libres sont une succession de forme qui dépendent de la distribution de la masse, la rigidité et les conditions initiales. Pour ce système à 2DDL, il existe deux formes caractéristiques de telle sorte que s'il est déplacé dans l'une de ces formes :

- Les deux étages vibrent dans la même direction,
- Les deux étages vibrent dans des directions opposées.

Chaque forme de vibration correspond à une fonction harmonique oscillant avec une période, elle est appelée un mode de vibration naturel de ce système à 2DDL. Le mouvement en vibration libre peut être donc représenté par une superposition de mouvement harmonique.

Pour une meilleure illustration, chaque forme de vibration sera étudiée séparément.

a. Forme 1 : Les deux étages vibrent dans la même direction :

Dans ce cas et comme montre la Figure IV-3, le mouvement est décrit par une même fonction harmonique $Z_1(t)$ de période T_1 avec amplitudes différentes ϕ_{11} et ϕ_{21} .

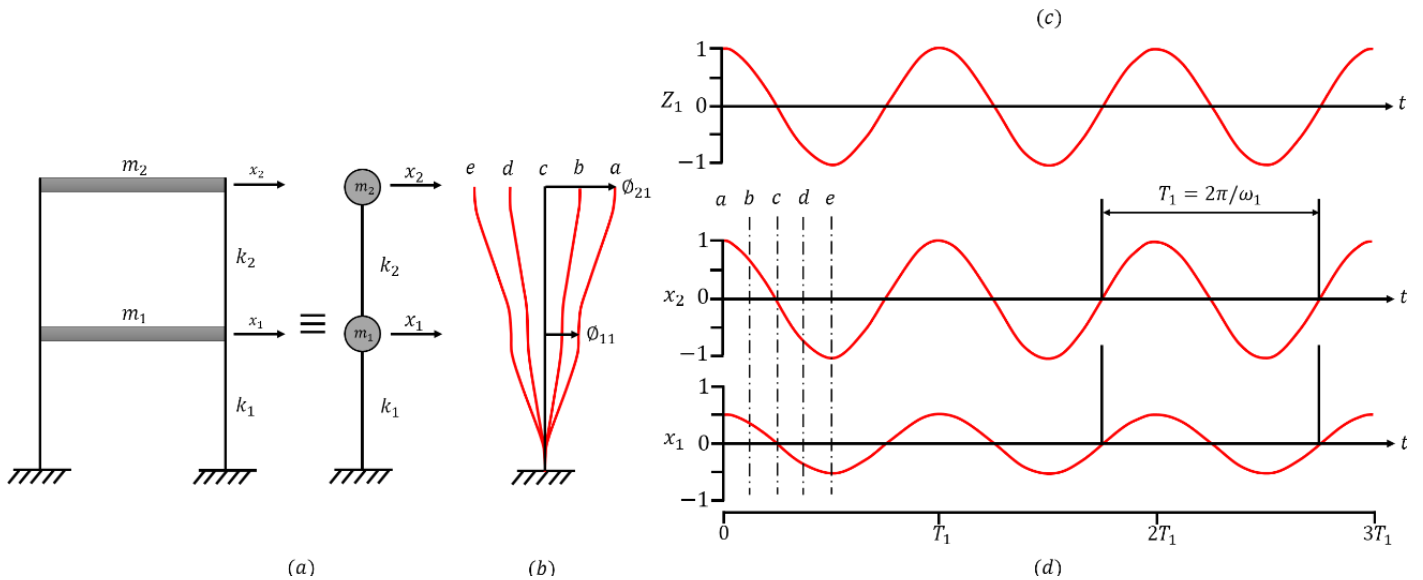


Figure IV-3. Vibration libre d'un système non amorti du premier forme de vibration : (a) structure à deux étages ; (b) des formes de déflexions aux instants a, b, c, d et e; (c) coordonnées modales $q_n(t)$; (d) l'historique des déplacements.

La vibration libre de ce système dans la première forme peut être décrits mathématiquement par :

$$x_1^1 = \phi_{11}Z_1(t) \text{ et } x_2^1 = \phi_{21}Z_1(t)$$

Donc, sous forme vectorielle est :

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_1 = \phi^1 Z_1(t) = \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{pmatrix} Z_1(t) \quad (\text{IV. 1})$$

b. Forme 2 : Les deux étages vibrent dans des directions opposées :

Le mouvement dans ce cas est décrit par une même fonction harmonique $Z_2(t)$ de période T_2 avec amplitudes différentes ϕ_{12} et ϕ_{22} (voir Figure IV-4).

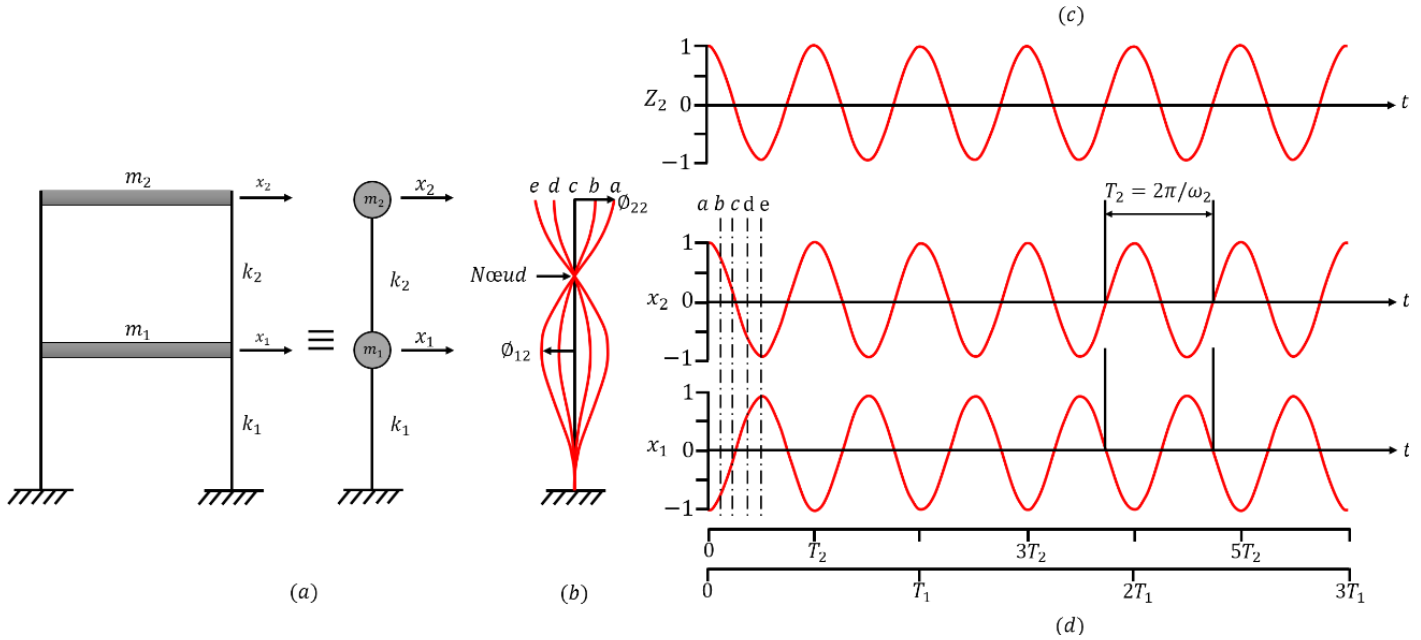


Figure IV-4. Vibration libre d'un système non amorti de la deuxième forme de vibration : (a) structure à deux étages; (b) des formes de déflexions aux instants a, b, c, d et e; (c) coordonnées modales $q_n(t)$; (d) l'historique des déplacements.

La vibration pour la deuxième forme peut être décrite mathématiquement par :

$$x_1^2 = \phi_{12} Z_2(t) \text{ et } x_2^2 = \phi_{22} Z_2(t)$$

Donc :

$$x_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_2 = \phi^2 Z_2(t) = \begin{pmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{pmatrix} Z_2(t) \quad (\text{IV.2})$$

Le déplacement de cette structure est donc la superposition des déplacements obtenus à travers les deux différentes formes de vibrations :

$$x = x_1 + x_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_1 + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{pmatrix} Z_1(t) + \begin{pmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{pmatrix} Z_2(t) \quad (\text{IV.3})$$

Comme on a mentionnée précédemment, les différentes formes de vibration sont appelées modes propres de vibration, pour cette structure on a deux modes de vibration :

- Mode 1 : $\phi^1 = \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{pmatrix}$, correspond au mouvement harmonique de période T_1 .
- Mode 2 : $\phi^2 = \begin{pmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{pmatrix}$, correspond au mouvement harmonique de période T_2 .

T_1 et T_2 sont nommées les périodes propres de vibration de la structure.

Dans le cas général, une structure à N étages possède N déplacements, N modes propres et N fréquences propres caractérisant le mouvement des DDL de la structure. Ainsi, on peut supposer que le mouvement d'une structure est la superposition des vibrations selon les divers modes propres. Chaque mode donne la forme de vibration, en le multipliant par une fonction temporelle on obtient l'amplitude.

$$x(t) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_1 + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_2 + \dots + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_n = \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \vdots \\ \phi_{n1} \end{pmatrix} Z_1(t) + \begin{pmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \vdots \\ \phi_{n2} \end{pmatrix} Z_2(t) + \dots + \begin{pmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \\ \vdots \\ \phi_{nn} \end{pmatrix} Z_n(t) \quad (\text{IV. 4})$$

Donc le déplacement en vibration libre peut s'écrire :

$$\{x(t)\} = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \{\phi_i\} Z_i(t) = [\phi]\{Z(t)\} \quad (\text{IV. 5})$$

Avec : $Z_i(t) = A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t$

Où :

x_i : déplacement au mode i ,

$\{\phi_i\}$: vecteur de mode propre,

$Z_i(t)$: fonction harmonique de période $T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$,

A_i et B_i : constantes déterminées en utilisant les conditions initiales,

ω_i : pulsation propre au mode i ,

$$[\phi] : \text{Matrice modale ; } [\phi] = \left[\begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \vdots \\ \phi_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \vdots \\ \phi_{n2} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \\ \vdots \\ \phi_{nn} \end{pmatrix} \right],$$

$$\{Z(t)\} : \text{vecteur de déplacement en coordonnées modales ; } Z_i(t) = \begin{pmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \\ \vdots \\ Z_n(t) \end{pmatrix}.$$

IV.3 Analyse modale :

L'analyse modale consiste à décomposer un oscillateur multiple en une somme d'oscillateurs simples indépendants. Elle est basée sur la propriété d'orthogonalité des modes propres qui permet de découpler le système d'équations du mouvement. Ce type d'analyse qui est à la base des résolutions numériques utilisées couramment dans les codes de calculs.

IV.3.1 Evaluation du fréquences propres et modes propres du système non amortie

L'équation du mouvement du système libre non amortie est :

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = 0 \quad (\text{IV. 6})$$

Chaque point de la structure subit un mouvement harmonique, la solution de ce système d'équations différentielles est de la forme :

$$\{x(t)\} = \sum_{i=1}^n \{\phi_i\} Z_i(t) = [\phi]\{Z(t)\} \quad (\text{IV. 7})$$

Reportant (IV.6) dans (IV.7), il devient :

$$([k] - \omega^2[m])[\phi]\{Z(t)\} = 0 \quad (\text{IV. 8})$$

D'après la règle de Cramer le système matriciel (IV.8) n'a de solution non triviale ($\{\phi\} \neq 0$ et $\{Z(t)\} \neq 0$) que si, et seulement si, son déterminant est nul.

$$\det([k] - \omega^2[m]) = 0 \quad (\text{IV. 9})$$

Les matrices $[k]$ et $[m]$ étant définies positives, il en résulte que l'équation (IV.9) possède n racines réelles ω_i^2 où n est la dimension des matrices $[k]$ et $[m]$, c'est-à-dire le nombre de degrés de liberté du système. Ces racines sont les valeurs propres du système (IV.8).

La plus faible pulsation est notée ω_1 , on l'appelle souvent pulsation fondamentale ($\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_i < \dots < \omega_n$).

On nomme fréquence propre du système les quantités :

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} \quad (\text{IV. 10})$$

qui sont au nombre de n . La plus faible fréquence f_1 est dénommée fréquence fondamentale, f_2 fréquence d'ordre 2, etc....

A chaque valeur propre ω_i^2 est associé un vecteur propre $\{\phi_i\}$, solution de l'équation :

$$([k] - \omega_i^2[m])\{\phi_i\} = 0 \quad (\text{IV. 11})$$

qui du fait que ω_i^2 est valeur propre du système est non nul et défini à une constante multiplicative près :

$$\{\phi_i\}^T = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\} \quad (\text{IV. 12})$$

Le système possède n vecteurs propres associés aux valeurs propres. Ces vecteurs propres sont appelés **modes propres** du système. Les modes propres sont habituellement normalisés par rapport à la plus grande composante :

$$\{\phi_k\}^i = \begin{Bmatrix} 1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{Bmatrix}$$

Où, i représente la classe modale et k indique le degré de liberté.

Généralement $\phi_1^i = 1$

La solution générale de l'équation (IV.8) s'écrit alors :

$$\{x\} = \sum_{i=1}^n \{\phi_i\} Z_i(t) = \sum_{i=1}^n \{\phi_i\} (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t) \quad (\text{IV. 13})$$

Où les constantes A_i et B_i sont déterminées par les conditions initiales et les modes de vibration $\{\phi_i\}$ sont définis à une constante multiplicative près.

$\{\phi_i\}$ nous donne l'allure ou bien la forme de la vibration correspondante à ω_i .

La figure ci-dessous montre l'allure de chaque mode d'une structure à 3DDL.

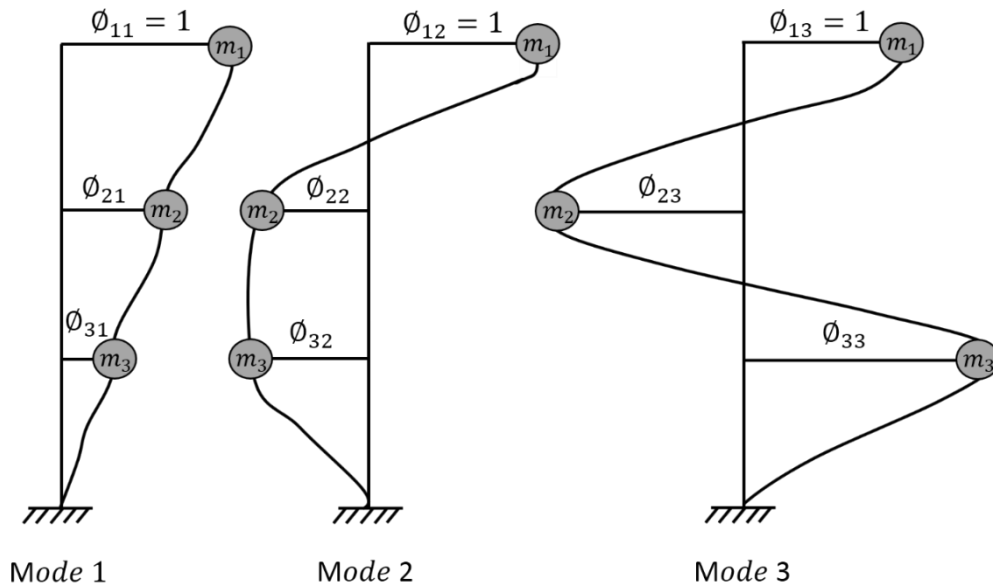


Figure IV-5. Modes propres.

Les N valeurs propres ω_n^2 et N modes propres ϕ_{kn} peuvent être assemblés en matrices.

Matrice spectrale :

$$[\omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

Matrice modale :

$$[\phi] = [\phi_{ki}] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix}$$

Où, i représente la classe modale et k indique le degré de liberté.

En utilisons les matrices spectrale et modale, on obtient :

$$[k][\phi] = [m][\phi][\omega^2] \quad (\text{IV. 14})$$

Remarque :

On peut également utiliser la matrice de flexibilité pour trouver les solutions. En multipliant l'équation (IV.8) par l'inverse de la matrice de rigidité $[k]^{-1}$:

$$[k]^{-1}([k] - \omega^2[m])[\phi]\{Z(t)\} = 0 \quad (\text{IV. 15})$$

on obtient :

$$(1 - [k]^{-1}\omega^2[m])[\phi]\{Z(t)\} = 0 \quad (\text{IV. 16})$$

L'inverse de la matrice de rigidité est la matrice de flexibilité (souplesse) $[k]^{-1} = [\check{f}]$, donc :

$$(1 - [\check{f}]\omega^2[m])[\phi]\{Z(t)\} = 0 \quad (\text{IV. 17})$$

Le système matriciel (IV.17) n'a de solution non triviale ($\{\phi\} \neq 0$ et $\{Z(t)\} \neq 0$) que si, et seulement si, son déterminant est nul.

$$\det(1 - [\check{f}]\omega^2[m]) = 0 \quad (\text{IV. 18})$$

En divisant l'équation (IV.18) par ω^2 , selon la règle de Cramer la solution est de forme :

$$\det\left(\frac{1}{\omega^2}[I] - [\check{f}][m]\right) = 0 \quad (\text{IV. 19})$$

Où $[I]$ est la matrice unitaire.

La détermination des modes propres se fera de la même manière que précédemment où à chaque valeur propre ω_i^2 est associé un vecteur propre $\{\phi_i\}$, solution de l'équation :

$$\left(\frac{1}{\omega_i^2}[I] - [\check{f}][m]\right)\{\phi_i\} = 0 \quad (\text{IV. 20})$$

Exemple :

Considérons la structure à 3 niveaux de la Figure IV-6.

Données : $m = 2 \times 10^5 \text{ kg}$, $k = 12 \times 10^7 \text{ N/m}$

$m_3 = m = 2 \times 10^5 \text{ kg}$, $m_2 = 1.5m$, $m_1 = 2m$;

$k_3 = k = 12 \times 10^7 \text{ N/m}$, $k_2 = 2k$, $k_1 = 3k$

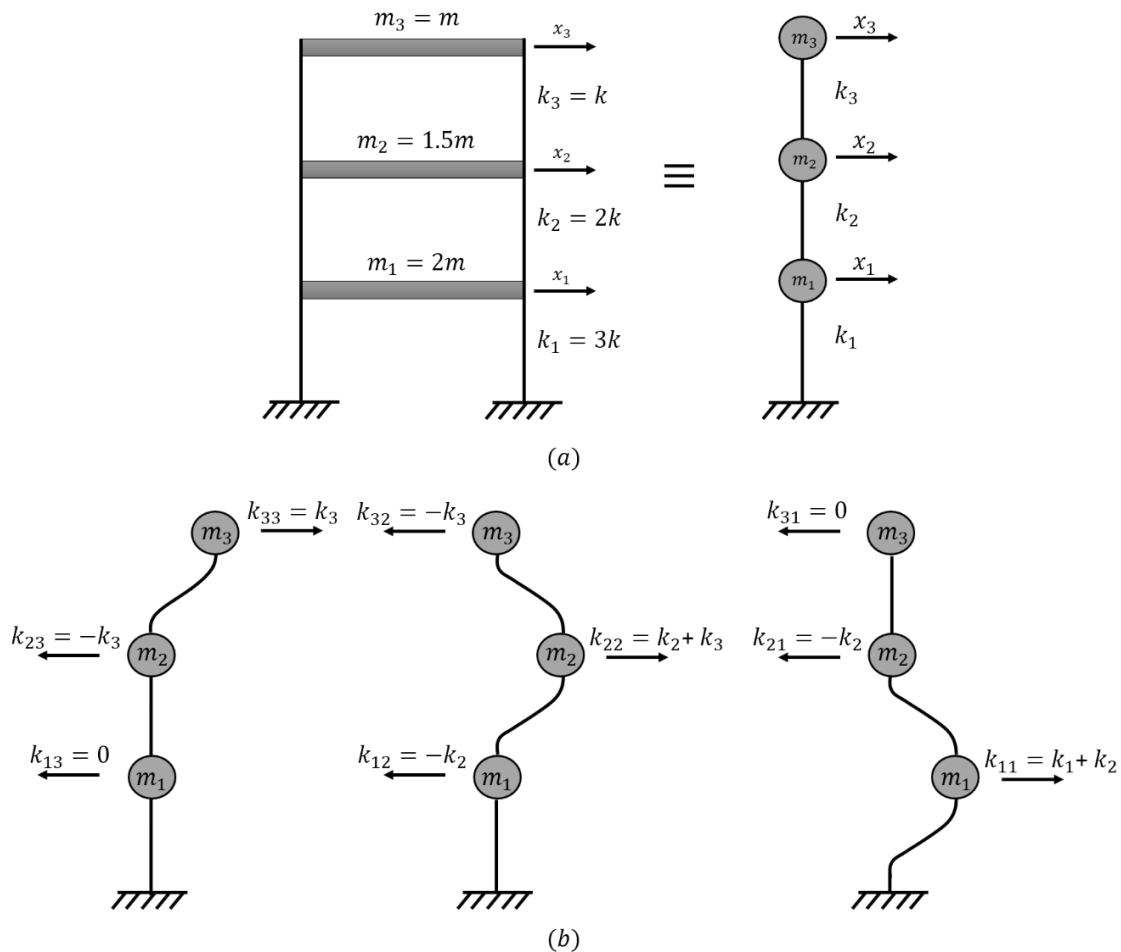


Figure IV-6. Etude des vibrations : (a) définition de la structure ; (b) coefficients d'influence de rigidité.

La matrice de rigidité de cette structure peut être déterminée en appliquant un déplacement unité successivement à chaque étage et en calculant les forces résultantes (voir Figure IV-6.b). On suppose les planchers infiniment rigides, et les forces élastiques à chaque étage peuvent être facilement déterminées par simple addition des coefficients de rigidité latéraux.

Les matrices de masse et de rigidité de cette structure peuvent s'écrire :

$$[m] = \begin{bmatrix} m_3 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix} \quad [k] = \begin{bmatrix} k_{33} & k_{32} & k_{31} \\ k_{23} & k_{22} & k_{21} \\ k_{13} & k_{12} & k_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 & 0 \\ -k_3 & k_2 + k_3 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}$$

Ou bien :

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad [k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

Rappel :

Le coefficient k_{ij} représente la force engendrée suivant le degré de liberté i par un déplacement unité imposé au degré de liberté j .

Donc :

$$[m] = 2 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} kg \quad [k] = 12 \times 10^7 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} N/m$$

Ou bien :

$$[m] = 2 \times 10^5 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} kg \quad [k] = 12 \times 10^7 \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} N/m$$

D'où :

$$\begin{aligned} [k] - \omega^2 [m] &= 12 \times 10^7 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} 2 \times 10^5 \\ &= 12 \times 10^7 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\omega^2 \end{bmatrix} 2 \times 10^5 \\ &= 12 \times 10^7 \begin{bmatrix} 1-A & -1 & 0 \\ -1 & 3-1.5A & -2 \\ 0 & -2 & 5-2A \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Avec :

$$A = \frac{\omega^2}{600}$$

Les fréquences de la structure sont données par la condition que $\Delta = 0$, où Δ est le déterminant de la matrice carrée. Évaluer ce déterminant, simplifier et égaliser à zéro conduit à l'équation du troisième degré suivante :

$$A^3 - 5.5A^2 + 7.5A - 2 = 0$$

Les trois solutions de cette équation sont :

$$A_1 = 0.3515, A_2 = 1.6066, A_3 = 3.5420$$

Par conséquent, les fréquences sont :

En déduit les carrés des fréquences et le vecteur des fréquences :

$$A = \frac{\omega^2}{600} \rightarrow 600 \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 210.90 \\ 963.96 \\ 2125.20 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14.522 \\ 31.048 \\ 46.100 \end{Bmatrix} rad/sec$$

Les modes vibratoires peuvent être déterminés par utilisation de l'équation (IV.11) :

$$([k] - \omega_i^2[m])\{\phi_i\} = 0$$

Où à chaque valeur propre ω_i^2 est associé un vecteur propre $\{\phi_i\}$

On a déjà calculé $[k] - \omega^2[m]$, on va juste changer à chaque fois la valeur de ω_i^2 ou la valeur A_i :

$$[k] - \omega_i^2[m] = 12 \times 10^7 \begin{bmatrix} 1 - A_i & -1 & 0 \\ -1 & 3 - 1.5A_i & -2 \\ 0 & -2 & 5 - 2A_i \end{bmatrix}$$

Avec :

$$A_i = \frac{\omega_i^2}{600}$$

Où à chaque valeur propre ω_i^2 est associé un vecteur propre $\{\phi_i\}$

Mode 1 :

$\omega_1 = 14.522 \text{ rad/sec}$ et $A_1 = 0.3515$

$$([k] - \omega_1^2[m])\{\phi_1\} = 12 \times 10^7 \begin{bmatrix} 1 - A_1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 - 1.5A_1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 - 2A_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{31} \\ \phi_{21} \\ \phi_{11} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$12 \times 10^7 \begin{bmatrix} 0.6485 & -1 & 0 \\ -1 & 2.4728 & -2 \\ 0 & -2 & 4.2970 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{31} \\ \phi_{21} \\ \phi_{11} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$12 \times 10^7 (0.6485\phi_{31} - \phi_{21}) = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$12 \times 10^7 (-2\phi_{21} + 4.2970\phi_{11}) = 0 \dots \dots \dots (2)$$

On sait que $\phi_{1i} = 1 \rightarrow \phi_{31} = 1$

Alors, de l'équation (1) on trouve :

$$\phi_{21} = 0.6485$$

de l'équation (2) on trouve :

$$\phi_{13} = 0.3018$$

Donc le 1^{er} mode de vibration :

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} \phi_{31} \\ \phi_{21} \\ \phi_{11} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 0.6485 \\ 0.3018 \end{Bmatrix}$$

Mode 2 :

$$\omega_2 = 31.048 \text{ et } A_2 = 1.6066$$

$$([k] - \omega_2^2[m])\{\phi_2\} = 12 \times 10^7 \begin{bmatrix} 1 - A_2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 - 1.5A_2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 - 2A_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{32} \\ \phi_{22} \\ \phi_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$12 \times 10^7 \begin{bmatrix} -0.6066 & -1 & 0 \\ -1 & 0.5901 & -2 \\ 0 & -2 & 1.7868 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{32} \\ \phi_{22} \\ \phi_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$12 \times 10^7 (-0.6066\phi_{32} - \phi_{22}) = 0 \dots \dots \dots (3)$$

$$12 \times 10^7 (-2\phi_{22} + 1.7868\phi_{12}) = 0 \dots \dots \dots (4)$$

$$\text{On a : } \phi_{32} = 1$$

Alors de l'équation (3) on trouve :

$$\phi_{22} = -0.6066$$

de l'équation (4) on trouve :

$$\phi_{12} = -0.6790$$

Donc le 2^{ème} mode de vibration :

$$\phi_2 = \begin{Bmatrix} \phi_{32} \\ \phi_{22} \\ \phi_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ -0.6066 \\ -0.6790 \end{Bmatrix}$$

Mode 3 :

$$\omega_3 = 46.100 \text{ et } A_3 = 3.5420$$

$$([k] - \omega_3^2[m])\{\phi_3\} = 12 \times 10^7 \begin{bmatrix} 1 - A_3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 - 1.5A_3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 - 2A_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{33} \\ \phi_{23} \\ \phi_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$12 \times 10^7 \begin{bmatrix} -2.542 & -1 & 0 \\ -1 & -2.313 & -2 \\ 0 & -2 & -2.084 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{33} \\ \phi_{23} \\ \phi_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$12 \times 10^7 (-2.542\phi_{33} - \phi_{23}) = 0 \dots \dots \dots (5)$$

$$12 \times 10^7 (-2\phi_{23} - 2.084\phi_{13}) = 0 \dots \dots \dots (6)$$

On a : $\phi_{33} = 1$

Alors de l'équation (5) on trouve :

$$\phi_{23} = -2.5420$$

de l'équation (6) on trouve :

$$\phi_{13} = 2.4395$$

Donc le 3^{ème} mode de vibration :

$$\phi_3 = \begin{Bmatrix} \phi_{33} \\ \phi_{23} \\ \phi_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ -2.5420 \\ 2.4395 \end{Bmatrix}$$

La matrice modale :

$$[\phi_{ki}] = \{\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3\} = \begin{bmatrix} \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.6485 & -0.6066 & -2.5420 \\ 0.3018 & 0.6790 & -2.4395 \end{bmatrix}$$

Rappel :

Le coefficient ϕ_{ki} représente le mode de vibration de degré de liberté k à la classe modale i.

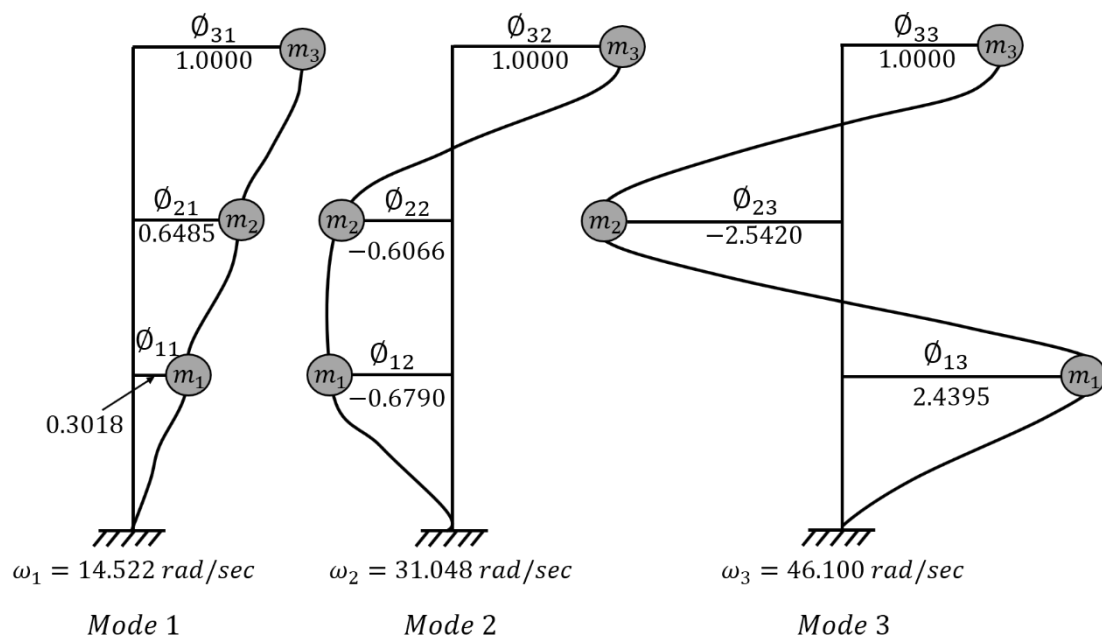


Figure IV-7. Modes de vibration de la structure en Figure IV.6.

IV.3.2 Orthogonalités des modes

On peut démontrer par l'application de la loi de Betti que les modes propres correspondant à différentes fréquences propres satisfont aux conditions d'orthogonalité suivantes, quand : $\omega_n \neq \omega_m$

$$\{\phi_n\}^T [k] \{\phi_m\} = 0 \quad \{\phi_n\}^T [m] \{\phi_m\} = 0 \quad (IV.21)$$

Ces propriétés importantes peuvent être prouvées comme suit : La $n^{\text{ième}}$ fréquence naturelle et le mode satisfont à l'équation :

$$[k] \{\phi_n\} = \omega_n^2 [m] \{\phi_n\} \quad (IV.22)$$

En multipliant par la transposé de $n^{\text{ième}}$ vecteur de $\{\phi_m\}$:

$$\{\phi_m\}^T [k] \{\phi_n\} = \omega_n^2 \{\phi_m\}^T [m] \{\phi_n\} \quad (IV.23)$$

De même, la $m^{\text{ième}}$ fréquence naturelle et le mode satisfont à l'équation (IV.22), donc, $[k] \{\phi_m\} = \omega_m^2 [m] \{\phi_m\}$, en multipliant par la transposé de $m^{\text{ième}}$ vecteur de $\{\phi_n\}$, on obtient :

$$\{\phi_n\}^T [k] \{\phi_m\} = \omega_m^2 \{\phi_n\}^T [m] \{\phi_m\} \quad (IV.24)$$

La transposée de la matrice sur le côté gauche de l'équation. (IV.23) sera égale à la transposée de la matrice sur le côté droit de l'équation, Donc :

$$\{\phi_n\}^T [k] \{\phi_m\} = \omega_n^2 \{\phi_n\}^T [m] \{\phi_m\} \quad (IV.25)$$

où nous avons utilisé la propriété de symétrie des matrices de masse et de rigidité. Soustraire Eq. (IV.24) de (IV.25) donne :

$$(\omega_n^2 - \omega_m^2) \{\phi_n\}^T [m] \{\phi_m\} = 0 \quad (IV.26)$$

Ainsi, l'équation (IV.21.b) est satisfaite lorsque $\omega_n^2 \neq \omega_m^2$, ce qui pour les systèmes à fréquences naturelles positives implique que $\omega_n \neq \omega_m$. Remplacer l'équation (IV.21.b) dans (IV.24) indique que l'équation (IV.21.a) est satisfaite lorsque $\omega_n \neq \omega_m$. Ceci complète une preuve pour les relations d'orthogonalité de l'équation (IV.21).

Nous avons établi les relations d'orthogonalité entre les modes avec les fréquences distinctes (c'est-à-dire, $\omega_n \neq \omega_m$). Si l'équation de fréquence (IV.22) a une racine multiple de j (c'est-à-dire que le système a une fréquence répétée j fois), il est toujours possible de trouver j modes associés à cette fréquence qui satisfont à l'équation (IV.21). Si ces j modes sont inclus avec les modes correspondant aux autres fréquences, on obtient un ensemble de N modes satisfaisant l'équation (IV.21) pour $n \neq m$.

L'orthogonalité des modes naturels implique que les matrices carrées suivantes sont diagonales :

$$K \equiv \{\phi\}^T [k] \{\phi\} M \equiv \{\phi\}^T [m] \{\phi\} \quad (IV.27)$$

où les éléments diagonaux sont :

$$K_n = \{\phi_n\}^T [k] \{\phi_n\} M_n = \{\phi_n\}^T [m] \{\phi_n\} \quad (IV.28)$$

Puisque $[m]$ et $[k]$ sont définis positifs, les éléments diagonaux de K et M sont positifs. Ils sont liés par :

$$K_n = \omega_n^2 M_n \quad (IV.29)$$

Cela peut être démontré à partir des définitions de K_n et M_n comme suit : Substitution l'équation (IV.22) dans (IV.23) donne :

$$K_n = \{\phi_n\}^T (\omega_n^2 [m] \{\phi_n\}) = \omega_n^2 (\{\phi_n\}^T [m] \{\phi_n\}) = \omega_n^2 M_n \quad (IV.30)$$

IV.4 Evaluation du mode de vibration

IV.4.1 Méthode de Rayleigh

La méthode énergétique de Rayleigh a été développée à partir de la loi de la conservation de l'énergie (système conservatif : l'énergie totale d'un système non amorti et libre de se mouvoir est constante). Elle est utilisée pour la détermination de la pulsation fondamentale d'une structure oscillant ayant un nombre limité ou infini de DDL. Il est souvent nécessaire d'inclure plus d'un mode si on veut obtenir des résultats précis.

La généralisation de la méthode de Rayleigh est l'une des méthodes les plus commodes pour calculer les premières modes d'une structure.

Si Eq. (IV.14) est prémultiplié par $\{\phi\}^T$, l'équation scalaire suivante est obtenue :

$$\{\phi\}^T [k] \{\phi\} = \lambda \{\phi\}^T [m] \{\phi\} \quad (IV.31)$$

Où : $\lambda = \omega^2$

La précision positive de $[m]$ garantit que $\{\phi\}^T [m] \{\phi\}$ est non nul, de telle sorte qu'il est permis de résoudre pour le scalaire λ :

$$\lambda = \frac{\{\phi\}^T [k] \{\phi\}}{\{\phi\}^T [m] \{\phi\}} \quad (IV.32)$$

qui dépend évidemment du vecteur $\{\phi\}$. Ce quotient est appelé quotient de Rayleigh. Il peut également être dérivé en assimilant la valeur maximale de l'énergie cinétique à la valeur maximale de l'énergie potentielle en supposant que le système vibrant exécute un mouvement harmonique simple à la fréquence ω avec la forme déviée donnée par $\{\phi\}$.

Exemple :

Considérons le bâtiment à trois étages de la Figure IV-6.a, la masse de la structure est supposée concentrée aux étages et la masse des poteaux est négligeable. Les planchers sont infiniment rigides. Le déplacement maximal de chaque masse δ_i est causé par lui-même.

Déterminer la pulsation fondamentale de la structure en utilisant la méthode de Rayleigh.

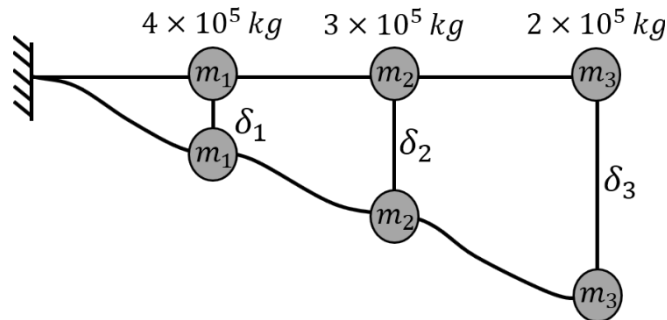


Figure IV-8. Détermination de fréquence fondamentale d'un système à 3DDL par la méthode de Rayleigh.

La matrice de la rigidité de ce système est :

$$[k] = 12 \times 10^7 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} N/m$$

Pour évaluer la pulsation fondamentale de ce système en utilisant la méthode de Rayleigh, où :

$$\omega_1^2 = \frac{\{\phi_1\}^T [k] \{\phi_1\}}{\{\phi_1\}^T [m] \{\phi_1\}}$$

On sait que $P = \delta k \rightarrow \delta = P k^{-1}$

Dans ce cas le déplacement maximal de chaque masse est causé par lui-même c'est à dire $\delta_i = m_i k_i^{-1}$

Donc :

$$\{\delta\} = \{M\}[K]^{-1} = \{M\}[\tilde{f}] = 10^6 \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix} \times \frac{10^{-7}}{72} \begin{bmatrix} 11 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{10^{-1}}{72} \begin{Bmatrix} 45 \\ 33 \\ 18 \end{Bmatrix}$$

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_3 \\ \delta_2 \\ \delta_1 \end{Bmatrix} = 10^{-1} \begin{Bmatrix} 0.6250 \\ 0.4583 \\ 0.2500 \end{Bmatrix}$$

Ensuite, en divisant chaque valeur de $\{\delta\}$ par δ_1 pour obtenir le vecteur du mode propre $\{\phi\}$.

$$\begin{Bmatrix} \delta_3/\delta_3 \\ \delta_2/\delta_3 \\ \delta_1/\delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.06250/0.06250 \\ 0.04583/0.06250 \\ 0.02500/0.06250 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 0.7333 \\ 0.4000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_{31} \\ \phi_{21} \\ \phi_{11} \end{Bmatrix}$$

Alors : le vecteur du mode propre devient :

$$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 0.7333 \\ 0.4000 \end{Bmatrix}$$

Il ne reste que la détermination de la valeur de $\{\phi_1\}^T [k] \{\phi_1\}$ et $\{\phi_1\}^T [m] \{\phi_1\}$

$$\begin{aligned} \{\phi_1\}^T [k] \{\phi_1\} &= \{1.0000 \quad 0.7333 \quad 0.4000\} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} 12 \times 10^6 \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 0.7333 \\ 0.4000 \end{Bmatrix} \\ &= 12 \times 10^7 \{0.2667 \quad 0.3999 \quad 0.5334\} \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 0.7333 \\ 0.4000 \end{Bmatrix} = 9.2797 \times 10^7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\phi_1\}^T [m] \{\phi_1\} &= \{1.0000 \quad 0.7333 \quad 0.4000\} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \times 10^5 \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 0.7333 \\ 0.4000 \end{Bmatrix} \\ &= 2 \times 10^5 \{1.0000 \quad 1.1000 \quad 0.8000\} \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 0.7333 \\ 0.4000 \end{Bmatrix} = 4.2533 \times 10^5 \end{aligned}$$

Donc la pulsation fondamentale est :

$$\omega_1^2 = \frac{9.2797 \times 10^7}{4.2533 \times 10^5} = 218.1765 \rightarrow \omega_1 = 14.7708 \text{ rad/sec}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\{\phi_1\}^T [k] \{\phi_1\}}{\{\phi_1\}^T [m] \{\phi_1\}}} = \sqrt{\frac{9.2797 \times 10^7}{4.2533 \times 10^5}} = 14.7708 \text{ rad/sec}$$

IV.4.2 Méthode de Stodola :

La meilleure méthode de calcul dynamique à la main est sans doute celle de Stodola.

L'utilisation de l'itération pour évaluer le mode de vibration fondamental d'une structure est un concept très ancien qui était à l'origine appelé la méthode Stodola après son origine.

Il est désormais reconnu qu'il fait partie d'un large segment de la mécanique des structures dans lequel des procédures d'itération sont utilisées. Le point de départ de cette formulation est l'énoncé des équations de mouvement des vibrations libres non amorties données par Eq. (IV.22) :

$$[k]\{\emptyset_n\} = \omega_n^2 [m]\{\emptyset_n\}$$

Cette équation exprime le fait que dans les vibrations libres non amorties, les forces d'inertie induites par le mouvement des masses doivent être équilibrées par les forces élastiques résultant des déformations du système. Cet équilibre ne sera satisfait que si les déplacements $\{\emptyset_n\}$ ont la forme du $n^{\text{ième}}$ mode de vibration et varient harmoniquement à la fréquence du $n^{\text{ième}}$ mode ω_n . Expriment les forces d'inertie sur le côté droit de Eq. (IV.22) comme :

$$[f_I] = \omega_n^2 [m]\{\emptyset_n\}$$

Détermination du mode fondamental :

La meilleure méthode de calcul dynamique à la main est sans doute celle de Stodola, que nous présentons ici sous forme matricielle. La méthode est fondée sur l'Eq. (IV.17), que l'on peut écrire :

$$\frac{1}{\omega^2} \{\emptyset\} \{Z(t)\} = [\check{f}][m]\{\emptyset\} \{Z(t)\} \quad (\text{IV.33})$$

Le produit matriciel $[\check{f}][m]$ caractérise les propriétés dynamiques de la structure. On l'appelle matrice dynamique et on le note D :

$$[D] = [\check{f}][m] \quad (\text{IV.34})$$

L'Eq. (IV.33) devient :

$$\frac{1}{\omega^2} \{\emptyset\} \{Z(t)\} = [D]\{\emptyset\} \{Z(t)\} \quad (\text{IV.35})$$

Cette dernière équation ne sera satisfaite que par les vecteurs qui représentent un mode de vibration vrai ; il en existe N et le but de la méthode de Stodola est de tous les déterminer, ou d'en déterminer un certain nombre.

On commence par se donner un vecteur initial $\{x_1^{(0)}\}$, qui doit représenter au mieux le premier mode ; son amplitude est arbitraire. L'indice inférieur 1 caractérise le premier mode et l'indice supérieur (0) indique qu'il s'agit de l'hypothèse initiale. Si on introduit ce vecteur dans le second membre de l'Eq. (IV.35), une nouvelle déformée sera obtenue en multipliant à gauche par $[D]$:

$$\frac{1}{\omega^2} \{x_1^{(1)}\} = [D]\{x_1^{(0)}\} \quad (\text{IV.36})$$

En général la nouvelle déformée différera de l'hypothèse initiale, sauf s'il s'agit du mode vrai ; on lui attribue l'indice supérieur (1). En pratique l'Eq. (IV.36) ne pourra pas être écrite directement car la fréquence de vibration n'est pas connue. Le produit matriciel de D par la déformée $\{x_1^{(0)}\}$ sera désigné par $\{\bar{x}_1^{(1)}\}$:

$$\{\bar{x}_1^{(1)}\} = [D]\{x_1^{(0)}\} \quad (\text{IV.37})$$

$\{\bar{x}_1^{(1)}\}$ est proportionnel à la déformée calculée, $\frac{1}{\omega_1^2}$ étant le facteur de proportionnalité inconnu. Si on compare les Eqs. (IV.36) et (IV.37) :

$$\frac{1}{\omega_1^2} \{x_1^{(1)}\} = \{\bar{x}_1^{(1)}\} \quad (\text{IV. 38})$$

Si on suppose que l'amplitude calculée est égale à l'amplitude initiale, une équation équivalente à l'Eq. (IV.38) permet de calculer la fréquence. Considérons la coordonnée de déplacement d'un point arbitraire k ; on a :

$$\bar{x}_{k1}^{(1)} = \frac{1}{\omega_1^2} x_{k1}^{(0)} \quad (\text{IV. 39})$$

Où :

$$\omega_1^2 = \frac{x_{k1}^{(0)}}{x_{k1}^{(1)}} \quad (\text{IV. 40})$$

Si la déformée supposée était un mode vrai, la même fréquence serait obtenue en calculant le rapport de l'Eq. (IV.40) pour n'importe quelle coordonnée de la structure. En règle générale la déformée $\bar{x}^{(1)}$ diffèrera de $x^{(0)}$, et un résultat différent sera obtenu pour chacune des coordonnées. La vraie fréquence du premier mode sera alors située entre les valeurs maximum et minimum obtenues à partir de l'Eq. (IV.40) :

$$\left(\frac{x_{k1}^{(0)}}{\bar{x}_{k1}^{(1)}} \right)_{\min} < \omega_1^2 < \left(\frac{x_{k1}^{(0)}}{\bar{x}_{k1}^{(1)}} \right)_{\max} \quad (\text{IV. 41})$$

Il résulte de cette propriété qu'une meilleure approximation de la fréquence sera obtenue par tout procédé utilisant des valeurs moyennes. L'un des meilleurs de ces procédés consiste à utiliser la répartition massique comme facteur de pondération. Si on multiplie à gauche les 2 membres de l'Eq. (IV.39) par $\{\bar{x}_1^{(1)}\}^T [m]$ et que l'on calcule ω_1^2 , on obtient ainsi :

$$\omega_1^2 = \frac{\{\bar{x}_1^{(1)}\}^T [m] \{x_1^{(0)}\}}{\{\bar{x}_1^{(1)}\}^T [m] \{\bar{x}_1^{(1)}\}} \quad (\text{IV. 42})$$

Cette équation représente la meilleure approximation possible de la fréquence à l'aide d'une seule itération effectuée à partir d'une hypothèse initiale quelconque sur le mode $\{x_1^{(0)}\}$ (L'équivalence de cette expression et de celle de la méthode de Rayleigh améliorée (IV.32) vaut la peine d'être remarquée). La déformée calculée $\{x_1^{(1)}\}$ représente une meilleure approximation du premier mode que ne l'était $\{x_1^{(0)}\}$. Par conséquent, si $\{x_1^{(1)}\}$ et la déformée $\{\bar{x}_1^{(2)}\}$ qui en résulte sont utilisées dans les Eqs. (IV.40) ou (IV.42), la fréquence obtenue sera également une meilleure

approximation que ne l'était celle calculée à partir de l'hypothèse initiale. En répétant le procédé un certain nombre de fois, l'approximation du mode peut être améliorée jusqu'au degré de précision désiré. Autrement dit, après s cycles :

$$\{\bar{x}_1^{(s)}\} = \frac{1}{\omega_1^2} \{x_1^{(s-1)}\} = \frac{1}{\omega_1^2} \{\phi_1\} \quad (\text{IV. 43})$$

$\{\bar{x}_1^{(s)}\}$ et $\{x_1^{(s-1)}\}$ peuvent être calculés jusqu'à n'importe quel nombre de décimales. Lorsque le procédé a convergé de façon satisfaisante, la fréquence vraie est obtenue en écrivant l'égalité des déplacements maximum :

$$\omega_1^2 = \frac{(x_{k1}^{(s-1)})_{\max}}{(\bar{x}_{k1}^{(s)})_{\max}} = \frac{1}{(\bar{x}_{k1}^{(s)})_{\max}} \quad (\text{IV. 44})$$

Lorsque le mode de vibration vrai a été déterminé il n'y a plus lieu d'utiliser le procédé de moyenne pondérée (IV.42) pour améliorer la solution.

Preuve de convergence de la méthode :

La déformée initialement supposée peut être exprimée au moyen des coordonnées principales :

$$\{x_1^{(0)}\} = [\phi] \{Z^{(0)}\} = \{\phi_1\} Z_1^{(0)} + \{\phi_2\} Z_2^{(0)} + \dots + \{\phi_n\} Z_n^{(0)} \quad (\text{IV. 45})$$

La coordonnée $Z_1^{(0)}$ sera relativement importante si le choix initial de la déformée est bon. Les forces d'inertie relatives à cette déformée associée à la fréquence du premier mode sont :

$$\{F_l^{(0)}\} = \omega_1^2 [m] \{x_1^{(0)}\} = \omega_1^2 [m] [\phi] \{Z^{(0)}\} \quad (\text{IV. 46})$$

En développant $\{x_1^{(0)}\}$ comme on l'a fait à l'Eq. (IV.45) et en remplaçant ω_1^2 par $\omega_i^2 (\omega_1/\omega_i)^2$, on obtient :

$$\{F_l^{(0)}\} = [m] \left(\{\phi_1\} \omega_1^2 Z_1^{(0)} + \{\phi_2\} \omega_2^2 Z_2^{(0)} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 + \dots + \{\phi_n\} \omega_n^2 Z_n^{(0)} \left(\frac{\omega_1}{\omega_n} \right)^2 \right) \quad (\text{IV. 47})$$

Les flèches résultant de ces forces d'inertie sont :

$$\{\bar{x}_1^{(1)}\} = [\check{f}] \{F_l^{(0)}\} = [\check{f}] [m] \left(\{\phi_1\} \omega_1^2 Z_1^{(0)} + \{\phi_2\} \omega_2^2 Z_2^{(0)} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 + \dots + \{\phi_n\} \omega_n^2 Z_n^{(0)} \left(\frac{\omega_1}{\omega_n} \right)^2 \right) \quad (\text{IV.48})$$

Où :

$$\{\bar{x}_1^{(1)}\} = \sum_{i=1}^n [D] \{\phi_i\} \omega_i^2 Z_i^{(0)} \left(\frac{\omega_1}{\omega_i} \right)^2 \quad (\text{IV. 49})$$

Si on multiplie les deux côtés de l'Eq. (IV.22) par $[\tilde{f}]$, on obtient :

$$\{\phi_i\} = \omega_i^2 [D] \{\phi_i\} \quad (\text{IV.50})$$

on peut alors réécrire l'Eq. (IV.49) sous la forme :

$$\{\bar{x}_1^{(1)}\} = \sum_{i=1}^n \{\phi_i\} Z_i^{(0)} \left(\frac{\omega_1}{\omega_i}\right)^2 \quad (\text{IV.51})$$

La forme finale améliorée du premier cycle $\{x_1^{(1)}\}$ est alors obtenue en normalisant ce vecteur, en le divisant par son plus grand élément, $\{\bar{x}_1^{(1)}\}_{\max}$, Donc :

$$\{x_1^{(1)}\} = \frac{\{\bar{x}_1^{(1)}\}}{\{\bar{x}_1^{(1)}\}_{\max}} = \frac{\sum_{i=1}^n \{\phi_i\} Z_i^{(0)} \left(\frac{\omega_1}{\omega_i}\right)^2}{\{\bar{x}_1^{(1)}\}_{\max}} \quad (\text{IV.52})$$

Suivre la même procédure pour un autre cycle d'itération conduit alors à :

$$\{x_1^{(2)}\} = \frac{\{\bar{x}_1^{(2)}\}}{\{\bar{x}_1^{(2)}\}_{\max}} = \frac{\sum_{i=1}^n \{\phi_i\} Z_i^{(0)} \left(\frac{\omega_1}{\omega_i}\right)^4}{\{\bar{x}_1^{(2)}\}_{\max}} \quad (\text{IV.53})$$

Après s cycles on obtient :

$$\begin{aligned} \{x_1^{(s)}\} &= \frac{\{\bar{x}_1^{(s)}\}}{\{\bar{x}_1^{(s)}\}_{\max}} = \frac{\sum_{i=1}^n \{\phi_i\} Z_i^{(0)} \left(\frac{\omega_1}{\omega_i}\right)^{2s}}{\{\bar{x}_1^{(s)}\}_{\max}} \\ &= \frac{1}{\{\bar{x}_1^{(s)}\}_{\max}} \left(\{\phi_1\} Z_1^{(0)} + \{\phi_2\} Z_2^{(0)} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^{2s} + \dots + \{\phi_n\} Z_n^{(0)} \left(\frac{\omega_1}{\omega_n}\right)^{2s} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.54})$$

La dernière égalité résulte du fait que le coefficient correspondant au premier mode est beaucoup plus élevé que les autres coefficients, c'est-à-dire que :

$$1 \gg \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^{2s} \gg \dots \gg \left(\frac{\omega_1}{\omega_n}\right)^{2s} \quad (\text{IV.55})$$

Le résultat final est :

$$\{x_1^{(s)}\} = \frac{\{\phi_1\} Z_1^{(0)}}{(\{\phi_1\} Z_1^{(0)})_{\max}} \equiv \{\phi_1\} \quad (\text{IV.56})$$

Il est évident d'après l'Eq. (IV.55) que la contribution à la déformée $\{x_1^{(s)}\}$ de chaque mode d'ordre supérieur peut être rendue aussi faible que l'on veut si on itère un nombre suffisant de fois. La contribution du premier mode représente donc la déformée résultante. Il résulte de tout cela que

le procédé doit converger vers le premier mode dans la mesure où la contribution du premier mode à la déformée initiale $\{x_1^{(0)}\}$ n'est pas nulle.

Détermination des modes suivants de Stodola :

Les matrices appropriées pour calculer n'importe quel mode peuvent être obtenues facilement par l'équation suivante :

$$[D_{i+1}] = [D][S_i][S_i] = [S_{i-1}] - \frac{1}{M_i} \{\phi_i\} \{\phi_i\}^T [m] \quad (\text{IV. 57})$$

Où :

$[D_{i+1}]$: La matrice dynamique

$[S_i]$: La matrice de balayage avec $[S_0] = [I]$: la matrice unitaire,

$M_i = \{\phi_i\}^T [m] \{\phi_i\}$: la matrice de masse généralisée du mode i .

IV.4.3 Méthode de Holzer

Le principe de la méthode de Stodola est l'ajustement successif d'une déformée supposée jusqu'à la forme véritable du mode, puis le calcul de la fréquence correspondante. La méthode de Holzer procède dans l'ordre inverse : la fréquence est ajustée successivement à partir d'une hypothèse initiale jusqu'à l'obtention de la fréquence vraie ; la forme du mode est calculée simultanément.

La méthode de Holzer convient le mieux à l'étude de structures reposant le long d'un axe. Elle est facilement applicable pour les bâtiments à étages où les planchers sont supposés rigide. Dans cette méthode la fréquence est ajustée successivement à partir d'une hypothèse initiale jusqu'à l'obtention de la fréquence vraie ; la forme du mode est calculée simultanément.

Prenons un exemple d'un bâtiment à N étages (Figure IV-9), en supposant que les planchers sont rigides, la flèche latérale provient donc de la flexion des poteaux seulement et aucune rotation ne se produit aux nœuds. Dans ce cas la rigidité d'un étage au niveau i est :

$$k_i = \left(\frac{12EI}{h^3} \right)_i \quad (\text{IV. 58})$$

Où :

I : le moment d'inertie total de tous les poteaux au niveau i ,

h : la hauteur d'un étage i .

E : le module de Young.

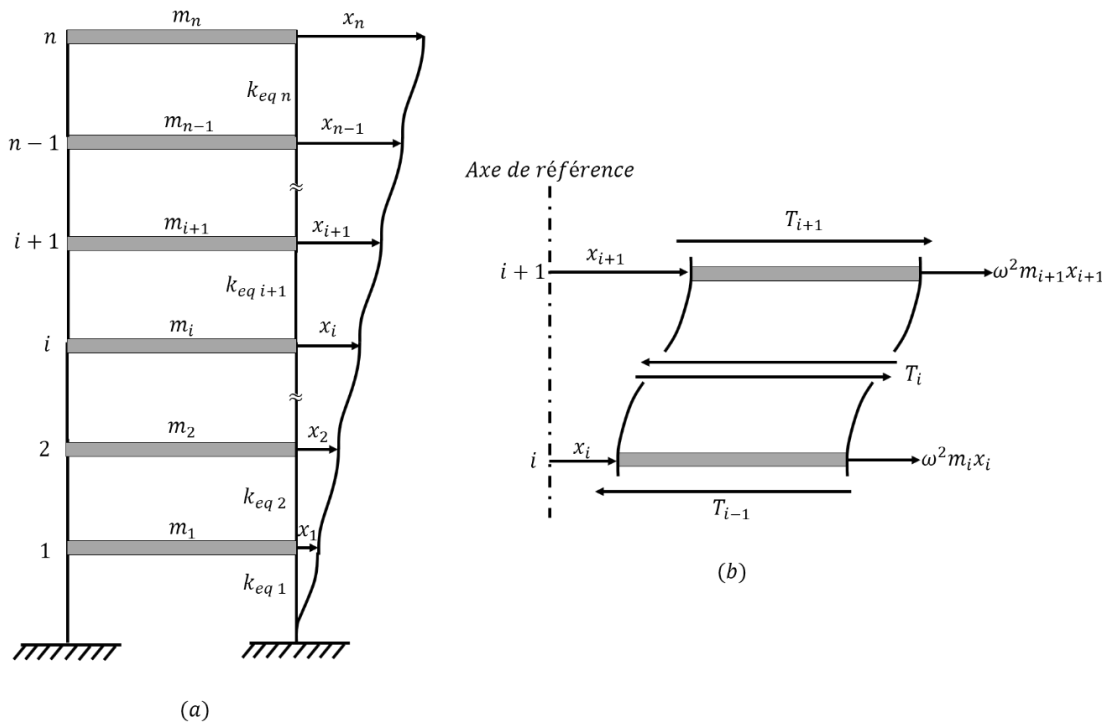


Figure IV-9. Méthode de Holzer pour un bâtiment : (a) structure donnée, (b) forces et déplacements en un étage.

Ce type de système est caractérisé par le fait que l'incrément de déplacement dans tout étage i ne dépend que de l'effort tranchant total T_i à ce niveau ; en vibrations libres l'incrément d'effort tranchant à tout niveau ne dépend que de la flèche totale à ce niveau en raison de la proportionnalité des forces d'inertie et des déplacements. Cette propriété rend possible le calcul des forces et des déplacements dans la structure entière de manière progressive en partant d'une extrémité, à condition qu'une hypothèse soit faite sur la fréquence de vibration et sur la condition limite inconnue à l'extrémité de départ. Donc l'effort tranchant d'un étage au niveau i est :

$$T_i = \sum_{k=1}^n F_{Ik} = \sum_{k=1}^n \omega^2 m_k x_k \quad (\text{IV. 59})$$

La rigidité d'un étage au niveau i peut s'écrire en fonction de l'effort tranchant :

$$T_i = k_i \Delta x_i = k_i (x_i - x_{i-1}) \quad (\text{IV. 60})$$

Où :

T_i : effort tranchant au niveau i ,

Δx_i : déformation au niveau i .

$$k_i = \frac{T_i}{\Delta x_i} = \frac{T_i}{x_i - x_{i-1}} \quad (\text{IV. 61})$$

Le déplacement au niveau i peut s'écrire :

$$x_i = x_{i-1} + \frac{\omega^2}{k_i} \sum_{k=1}^n m_k x_k \quad (\text{IV. 62})$$

Procédure de calcul :

La première étape consiste à supposer une fréquence de vibration ω et une amplitude de déplacement au sommet de $x_n = 1$.

En commençant par l'étage du haut (n), en utilisant cette fréquence et cette amplitude pour calculer la force d'inertie de l'étage (n) ($F_{In} = \omega^2 m_n x_n$), une fois la force d'inertie est calculer, on passe au calcul de l'effort tranchant qui est provoqué par cette force d'inertie, (à l'étage (n) l'effort tranchant (n) égale la force d'inertie (n) " $T_n = F_{In}$ ") ainsi que la déformation correspondante ($\Delta x_n = \frac{T_n}{k_n}$).

Maintenant en passe à l'étage ci-dessous ($n - 1$), en commençant par le calcul de la force d'inertie ($F_{In-1} = \omega^2 m_{n-1} x_{n-1}$), par la suite, en calculant l'effort tranchant ($T_{n-1} = F_{In} + F_{In-1}$) et la déformation ($\Delta x_{n-1} = \frac{T_{n-1}}{k_{n-1}}$).

On poursuit les calculs jusqu'à l'étage du bas, sion trouve un déplacement de la base supérieur à zéro, ce résultat indique qu'un mouvement harmonique de la base de cette amplitude et à une fréquence (qu'on choisit au début) produira une amplitude de vibration de 1.000 cm au sommet. On voit également à la forme du déplacement que la fréquence choisit est plus faible que la fréquence naturelle du premier mode. Donc on passe au deuxième essai avec une autre fréquence choisie arbitrairement. Le déplacement du sommet a été à nouveau pris égal à 1.000 cm, et la déformée a été calculée comme la procédure suivi au premier essai. On suppose que cette fois le déplacement de la base a été réduit (le déplacement obtenu est inférieur à celle obtenu au premier essai) ; la fréquence fixé à cet essai est donc assez proche de la fréquence naturelle vraie.

Les résultats des deux essais peuvent donner une bonne estimation de la fréquence vraie par extrapolation linéaire (Figure IV.8). L'extrapolation analytique donne :

$$\left(\frac{\Delta \omega^2}{\Delta x_B} \right)_{1-2} = \left(\frac{\Delta \omega^2}{\Delta x_B} \right)_{2-3}$$

où les indices indiquent les numéros des essais et Δx_B est la déformation de la base.

Une fois le $(\Delta \omega^2)_{2-3}$ est déterminer, on l'ajout à la fréquence du deuxième essai pour obtenir la nouvelle fréquence de l'essai suivant ($\omega_3^2 = \omega_2^2 + (\Delta \omega^2)_{2-3}$) et on poursuit les calculs jusqu'à l'étage du bas :

- Si on trouve un déplacement de la base égale à zéro donc la fréquence dans ce cas est pratiquement exacte;
- Si on trouve un déplacement de la base supérieur à zéro, on applique à nouveau le même type d'extrapolation jusqu'à trouvons un déplacement nul de la base.

Conditions aux limites :

A la base de la structure le déplacement relatif est nul, l'amplitude du déplacement supposé est arbitraire car des vibrations libres peuvent se produire avec n'importe quelle amplitude, au sommet on prend généralement $x_n = 1$.

La fréquence de vibration, elle, est définie, et si une hypothèse incorrecte est faite sur la fréquence, la condition limite à l'autre extrémité de la structure ne sera pas satisfaite c'est-à-dire le déplacement calculé à la base ne sera pas nul.

On peut déterminer la fréquence vraie en vibrations libres par tâtonnements, en ajustant l'hypothèse sur la fréquence jusqu'à satisfaire à la condition limite.

Remarque :

Ce procédé peut être utilisé pour calculer n'importe laquelle des fréquences de vibration et la forme du mode correspondante. Il est possible de calculer n'importe quel mode de vibration indépendamment de tous les autres.

IV.5 Conclusion

Ce chapitre a permis d'approfondir l'analyse dynamique des structures complexes à travers l'étude des vibrations libres des systèmes à plusieurs degrés de liberté. L'établissement des équations du mouvement, basé sur des formulations matricielles, a conduit à une meilleure compréhension du comportement vibratoire des structures soumises à des sollicitations dynamiques. L'introduction de la notion de modes propres et de fréquences propres a constitué une étape essentielle, permettant de décomposer le mouvement global en contributions modales indépendantes. Les propriétés d'orthogonalité des modes, démontrées rigoureusement à partir de la loi de Betti, facilitent la diagonalisation des matrices de masse et de raideur, simplifiant ainsi la résolution des équations du mouvement.

L'utilisation de méthodes pratiques telles que celles de Rayleigh, Stodola et Holzer a permis de proposer des approches efficaces pour l'évaluation des fréquences naturelles et des modes de vibration, notamment dans le cas de systèmes de grande dimension ou de complexité élevée. Chaque méthode présente des avantages spécifiques : la méthode de Rayleigh, fondée sur l'énergie, offre une estimation rapide de la pulsation fondamentale ; la méthode de Stodola permet une détermination itérative efficace des premiers modes ; tandis que la méthode de Holzer, adaptée aux systèmes unidimensionnels, fournit une alternative simple mais puissante dans certains cas de figure.

Ainsi, ce chapitre établit les fondements nécessaires pour aborder l'analyse dynamique des structures complexes et prépare le terrain pour l'étude des réponses forcées et amorties, qui feront l'objet des chapitres suivants.

V. Vibrations forcées des S.P.D.D. L

V.1 Introduction

V.2 Analyse dynamique des systèmes à plusieurs DDL par la méthode de la superposition modale

L'équation du mouvement d'un système à PDDL s'écrit comme suit :

$$[m]\{\ddot{x}(t)\} + [c]\{\dot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{p(t)\} \quad (\text{V. 1})$$

Cette écriture matricielle de l'équation du mouvement peut être représenté par un système de n équations couplées.

Alors que le mot couplé dire que le vecteur $\{x(t)\}$ inconnu que présente n inconnu :

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

Tous ces inconnus se trouvent dans la 1^{ère} équation la 2^{ème} équation jusqu'à la $n^{\text{ème}}$ équation, ce qui présente une complication mathématique pour la résoudre telle qu'elle est. Pour cela on doit passer d'un système d'équations couplées à un système d'équations découplées où chaque équation sera exprimée par un seul inconnu facile à déterminer. Alors, pour cela on doit exprimer ce système d'équations couplées dans la base des coordonnées généralisées (ou principales) par la relation suivante :

$$\{x(t)\} = \sum_{i=1}^n \{\phi_i\} Z_i(t) = [\phi] \{Z(t)\} \quad (V.2)$$

Où :

$\{x(t)\}$: représente le vecteur des coordonnées réelles (ou géométriques),

$\{Z(t)\}$: représente le vecteur des coordonnées généralisées (ou principales, ou modales),

$[\phi]$: la matrice modale, où cette matrice composée des vecteurs modaux $[\phi] = [\{\phi_1\} \{\phi_2\} \dots \{\phi_i\} \dots \{\phi_n\}]$, qui une matrice dont les colonnes sont représentées par les vecteurs des différents modes de vibration.

Condition d'application de la méthode :

Cette méthode de la superposition modale est basée sur la condition d'orthogonalité, si on applique cette condition d'orthogonalité par rapport à la matrice de masse on trouve une matrice de masse exprimée en coordonnées principales :

$$[m_p] = [\phi]^T [m] [\phi] = \begin{bmatrix} m_{p1} & & & 0 \\ & m_{p2} & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & m_{pn} \end{bmatrix}$$

Où $[m_p]$: la matrice de masse en coordonnées généralisées et qui est une matrice diagonale.

Si on applique la condition d'orthogonalité par rapport à la matrice de rigidité on trouve une matrice de rigidité exprimée en coordonnées principales :

$$[k_p] = [\phi]^T [k] [\phi] = \begin{bmatrix} k_{p1} & & & 0 \\ & k_{p2} & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & k_{pn} \end{bmatrix}$$

Où $[k_p]$: la matrice de rigidité en coordonnées généralisées et qui est une matrice diagonale.

V.2.1 Vibrations forcées non amorties

Le système d'équation du mouvement dans ce cas s'écrit comme suit :

$$[m] \{\ddot{x}(t)\} + [k] \{x(t)\} = \{p(t)\} \quad (V.3)$$

Prémultiplions l'Eq (V.3) par $[\phi]^T$:

$$[\phi]^T [m] \{\ddot{x}(t)\} + [\phi]^T [k] \{x(t)\} = [\phi]^T \{p(t)\} \quad (V.4)$$

Remplaçons l'Eq (V.2) dans l'Eq (V.4), le système d'équation du mouvement devient :

$$[\emptyset]^T [m][\emptyset]\ddot{Z}(t) + [\emptyset]^T [k][\emptyset]Z(t) = [\emptyset]^T \{p(t)\} \quad (V.5)$$

Sachant que $[\emptyset]^T [m][\emptyset] = [m_p]$ et $[\emptyset]^T [k][\emptyset] = [k_p]$; alors l'Eq (V.5) peut s'écrire comme suit :

$$[m_p]\ddot{Z}(t) + [k_p]Z(t) = [\emptyset]^T \{p(t)\} \quad (V.6)$$

Où : $[\emptyset]^T \{p(t)\} = \{p_p(t)\}$ représente le vecteur de la force en coordonnées généralisées.

L'Eq (V.6) peut s'écrire encore :

$$[m_p]\ddot{Z}(t) + [k_p]Z(t) = \{p_p(t)\} \quad (V.7)$$

Cette Eq (V.7) du mouvement obtenue présente l'équation du mouvement d'un système à plusieurs DDL exprimées dans la base des coordonnées généralisées, cette écriture matricielle peut être exprimée par un système d'équation, dans chaque équation présente un seul inconnu $Z_i(t)$:

$$\begin{cases} m_{p1}\ddot{Z}_1(t) + k_{p1}Z_1(t) = p_{p1}(t) \\ m_{p2}\ddot{Z}_2(t) + k_{p2}Z_2(t) = p_{p2}(t) \\ \vdots \\ m_{pi}\ddot{Z}_i(t) + k_{pi}Z_i(t) = p_{pi}(t) \\ \vdots \\ m_{pn}\ddot{Z}_n(t) + k_{pn}Z_n(t) = p_{pn}(t) \end{cases} \quad (V.8)$$

Chaque équation correspond à une équation du mouvement d'un oscillateur simple à un seul DDL (Figure V-1).

$$m_{pi}\ddot{Z}_i(t) + k_{pi}Z_i(t) = p_{pi}(t) \quad (V.9)$$

Ou bien :

$$\ddot{Z}_i(t) + \omega_i^2 Z_i(t) = \frac{p_{pi}(t)}{m_{pi}} \quad (V.10)$$

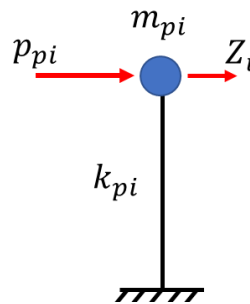


Figure V-1. Oscillateur simple à un seul DDL.

La pulsation du système considéré :

$$\omega_i = \sqrt{\frac{k_{pi}}{m_{pi}}} \quad (V.11)$$

La détermination de la réponse d'un système d'équation en coordonnées généralisées $Z_i(t)$ dépend de la nature de la charge $p_{pi}(t)$ et peut être obtenue par les méthodes exposées

précédemment pour la résolution des SSDDL (Méthodes Analytiques, Intégrale de Duhamel, Transformée de Fourier et Méthode Temporelle pas à pas).

D'où la réponse finale en coordonnées géométriques sera déterminée par un simple produit de la matrice masse modale et le vecteur de coordonnées généralisées déterminée au paravent, d'où on obtient en fin de compte la réponse réelle ou géométriques d'un système à plusieurs DDL (Eq (V.2)).

V.2.2 Vibrations forcées amorties

Le système d'équation du mouvement s'écrit comme suit :

$$[m]\{\ddot{x}(t)\} + [c]\{\dot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{p(t)\} \quad (V.12)$$

Prémultiplions l'Eq. (V.12) par $[\phi]^T$:

$$[\phi]^T [m] \{\ddot{x}(t)\} + [\phi]^T [c] \{\dot{x}(t)\} + [\phi]^T [k] \{x(t)\} = [\phi]^T \{p(t)\} \quad (V.13)$$

Remplaçons l'Eq. (V.2) dans l'Eq.(V.13), le système d'équation du mouvement devient :

$$[\phi]^T [m] [\phi] \ddot{Z}(t) + [\phi]^T [c] [\phi] \dot{Z}(t) + [\phi]^T [k] [\phi] Z(t) = [\phi]^T \{p(t)\} \quad (V.14)$$

En utilisant la propriété d'orthogonalité des modes propres par rapport aux matrices $[m]$ et $[k]$, l'Eq. (V.14) devient :

$$[m_p] \ddot{Z}(t) + [\phi]^T [c] [\phi] \dot{Z}(t) + [k_p] Z(t) = [\phi]^T \{p(t)\} \quad (V.15)$$

Où : $[\phi]^T [c] [\phi]$ est un système d'équation couplée, représente la matrice d'amortissement en coordonnées généralisées $[c_p]$.

$$[c_p] = [\phi]^T [c] [\phi] = \begin{bmatrix} c_{p1} & & & 0 \\ & c_{p2} & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & c_{pn} \end{bmatrix}$$

L'Eq (V.15) peut s'écrire comme suit :

$$[m_p] \ddot{Z}(t) + [c_p] \dot{Z}(t) + [k_p] Z(t) = \{p_p(t)\} \quad (V.16)$$

Cette écriture matricielle peut être représentée par un système d'équation découplée où chaque équation est exprimée en fonction d'un seul inconnu $Z_i(t)$:

$$\begin{cases} m_{p1} \ddot{Z}_1(t) + c_{p1} \dot{Z}_1(t) + k_{p1} Z_1(t) = p_{p1}(t) \\ m_{p2} \ddot{Z}_2(t) + c_{p2} \dot{Z}_2(t) + k_{p2} Z_2(t) = p_{p2}(t) \\ \vdots \\ m_{pi} \ddot{Z}_i(t) + c_{pi} \dot{Z}_i(t) + k_{pi} Z_i(t) = p_{pi}(t) \\ \vdots \\ m_{pn} \ddot{Z}_n(t) + c_{pn} \dot{Z}_n(t) + k_{pn} Z_n(t) = p_{pn}(t) \end{cases} \quad (V.17)$$

Chaque équation correspond à une équation du mouvement d'un oscillateur simple à un seul DDL.

$$m_{pi}\ddot{Z}_i(t) + c_{pi}\dot{Z}_i(t) + k_{pi}Z_i(t) = p_{pi}(t) \quad (V.18)$$

La détermination de la réponse de ce système d'équation en coordonnées généralisées $Z_i(t)$ dépend de la nature de la charge $p_{pi}(t)$. Alors, pour chaque équation on détermine l'inconnu $Z_i(t)$ pour obtenir en fin de compte le vecteur de coordonnée généralisée $\{Z(t)\}$. Donc, la réponse finale en coordonnées géométriques sera déterminée par un simple produit de la matrice masse modale et le vecteur de coordonnées généralisées (Eq (V.2)).

V.2.2.1 Détermination de la matrice d'amortissement

Le fait que les matrices de masse et de rigidité en coordonnée généralisée sont diagonales alors pour cette raison il est indispensable et plus pratique de rendre la matrice d'amortissement aussi diagonale. Pour cela l'hypothèse posée pour rendre la matrice d'amortissement diagonale est assurée par **le modèle d'amortissement de Rayleigh**, où la matrice d'amortissement dans cette hypothèse est considérée comme étant une combinaison linéaire proportionnelle à la matrice de masse et la matrice de rigidité assurée par la relation suivante :

$$[c] = a_0[m] + a_1[k] \quad (V.19)$$

Où :

$[c]$: amortissement de Rayleigh,

a_0 et a_1 sont des coefficients de proportionnalité restant à déterminer.

V.2.2.1.1 Détermination des coefficients de proportionnalité du modèle de Rayleigh

Le découplage des forces d'amortissement peut être démontré à partir de la relation suivante :

$$\{\phi_i\}^T [c] \{\phi_i\} = a_0 \{\phi_i\}^T [m] \{\phi_i\} + a_1 \{\phi_i\}^T [k] \{\phi_i\} = a_0 M_{pi} + a_1 M_{pi} \omega_i^2 = (a_0 + a_1 \omega_i^2) M_{pi} \quad (V.20)$$

En générale la matrice orthogonale d'amortissement aura la forme suivante :

$$[c_p] = [m_p] \sum_{i=0} a_i \left([m_p]^{-1} [k_p] \right)^i = \sum_{i=0} c_i \quad (V.21)$$

lorsque $i \neq 0$: $a_i = a_1 = a_2 = \dots = a_n$

L'amortissement de Rayleigh (Eq. (V.19)), est obtenu comme cas particulier de l'Eq. (V.21).

Par l'utilisation de la condition d'orthogonalité, l'Eq (V.19) devient :

$$[c_p] = a_0 [m_p] + a_1 [k_p] \quad (V.22)$$

On a déjà montré auparavant que la matrice de masse et la matrice de rigidité sont diagonales automatiquement la somme de deux matrices diagonales donne une matrice diagonale, ça veut dire la matrice d'amortissement $[c_p]$ est aussi diagonale :

$$\begin{bmatrix} c_{p1} & & 0 \\ & c_{p2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & c_{pn} \end{bmatrix} = a_0 \begin{bmatrix} m_{p1} & & 0 \\ & m_{p2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & m_{pn} \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} k_{p1} & & 0 \\ & k_{p2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & k_{pn} \end{bmatrix}$$

Cette écriture matricielle peut être représentée par un système de n équations avec seulement deux inconnus a_0 et a_1 . La $i^{\text{ème}}$ équation sera représentée par l'équation suivante :

$$c_{pi} = a_0 m_{pi} + a_1 k_{pi} \quad (\text{V.23})$$

Pour trouver a_0 et a_1 . Il ne faut seulement deux équations, prenant la $i^{\text{ème}}$ équation et la $j^{\text{ème}}$ équation, sachant que chaque équation dans la base des coordonnées généralisées présente l'équation d'un système à un seul DDL de masse m_{pi} , de rigidité k_{pi} et d'amortissement c_{pi} , ce dernier peut être présenté par la relation suivante :

$$c_{pi} = 2m_{pi} \omega_i \xi_i \quad (\text{V.24})$$

En remplaçant l'Eq (V.24) dans l'Eq (V.23), le système d'équation devient alors comme suit :

$$\begin{cases} c_{pi} = 2m_{pi} \omega_i \xi_i = a_0 m_{pi} + a_1 k_{pi} \\ c_{pj} = 2m_{pj} \omega_j \xi_j = a_0 m_{pj} + a_1 k_{pj} \end{cases} \quad (\text{V.25})$$

En divisant l'Eq (V.25.1) par m_{pi} et l'Eq (V.25.2) par m_{pj}

Le système d'équation devient :

$$\begin{cases} 2\omega_i \xi_i = a_0 + a_1 \omega_i^2 \\ 2\omega_j \xi_j = a_0 + a_1 \omega_j^2 \end{cases} \quad (\text{V.26})$$

de l'Eq. (V.26) on peut aisément déterminer les coefficients a_0 et a_1 :

$$a_1 = \frac{2(\omega_i \xi_i - \omega_j \xi_j)}{(\omega_i^2 - \omega_j^2)} \text{ et } a_0 = \frac{2\omega_i \omega_j (\omega_i \xi_j - \omega_j \xi_i)}{(\omega_i^2 - \omega_j^2)}$$

En remplaçant les deux coefficients a_0 et a_1 dans l'Eq (V.19), on trouve la matrice $[c]$ selon le modèle de Rayleigh.

V.3 Méthode de superposition modale

V.3.1 Vibrations du support

La structure donnée par la Figure V-2, constituée d'un portique à trois niveaux, est soumise à un mouvement de ses points d'appuis sur le sol. On supposera dans un premier temps que l'accélération $\ddot{x}(t)$ est identique en tous les points d'appui et est représentée par un mouvement de translation.

La règle de composition des déplacements permet d'exprimer le déplacement absolu en fonction du déplacement relatif par :

$$\{x_T(t)\} = \{x_r(t)\} + \{\Delta\}x_s(t) \quad (V.27)$$

Où $\{\Delta\}$ est le vecteur donnant la direction de la sollicitation. Le vecteur $\{\Delta\}$ a pour composantes « 1 » dans la direction du mouvement de translation, « 0 » pour les autres degrés de liberté.

Les différentes forces agissant sur les masses du système sont :

- Forces d'inertie : $\{f_I\} = [m]\{\ddot{x}_T(t)\}$
- Forces élastiques : $f_k = [k]\{x_r(t)\}$
- Forces d'amortissement : $f_c = [c]\{\dot{x}_r(t)\}$

Les forces d'inertie s'expriment en fonction de la matrice de masse et des accélérations absolues. L'équation d'équilibre dynamique du système s'écrit comme suite :

$$[m]\{\ddot{x}_T(t)\} + [c]\{\dot{x}_r(t)\} + [k]\{x_r(t)\} = 0 \quad (V.28)$$

Tenant compte de la relation (V.27), l'Eq. (V.28) devient :

$$[m]\{\ddot{x}_r(t)\} + [c]\{\dot{x}_r(t)\} + [k]\{x_r(t)\} = -[m]\{\Delta\}\ddot{x}_s(t) = -\{p_{eff}^r(t)\} \quad (V.29)$$

V.3.2 Décomposition modale

Pour découpler l'Eq. (V.29), en utilisant la décomposition modale explicitée précédemment, le vecteur $\{x_r(t)\}$ s'exprime par :

$$\{x_r(t)\} = \sum_{i=1}^n \{\phi_i\} Z_i(t) = [\phi]\{Z(t)\} \quad (V.30)$$

En reportant dans l'Eq. (V.29), tenant compte des propriétés d'orthogonalité des vecteurs propres par rapport aux matrices de masse $[m]$ et de rigidité $[k]$, et en faisant l'hypothèse que la matrice $[c]$ possède la même propriété, on obtient les équations découplées où chaque équation est caractérisée par un seul inconnu $Z_i(t)$:

$$\begin{cases} \ddot{Z}_1(t) + 2\omega_1\xi_1\dot{Z}_1(t) + \omega_1^2 Z_1(t) = \frac{p_{p1}(t)}{m_{p1}} \\ \ddot{Z}_2(t) + 2\omega_2\xi_2\dot{Z}_2(t) + \omega_2^2 Z_2(t) = \frac{p_{p2}(t)}{m_{p2}} \\ \vdots \\ \ddot{Z}_i(t) + 2\omega_i\xi_i\dot{Z}_i(t) + \omega_i^2 Z_i(t) = \frac{p_{pi}(t)}{m_{pi}} \\ \vdots \\ \ddot{Z}_n(t) + 2\omega_n\xi_n\dot{Z}_n(t) + \omega_n^2 Z_n(t) = \frac{p_{pn}(t)}{m_{pn}} \end{cases} \quad (V.31)$$

Chaque équation correspond à une équation du mouvement d'un oscillateur simple à un seul DDL.

$$\ddot{Z}_i(t) + 2\omega_i \xi_i \dot{Z}_i(t) + \omega_i^2 Z_i(t) = \frac{p_{pi}(t)}{m_{pi}} \quad (V.32)$$

dans laquelle la force en coordonnées généralisées s'exprime par :

$$p_{pi}(t) = -\{\phi_i\}^T \{p_{eff}(t)\} = -\{\phi_i\}^T [m] \{\Delta\} \ddot{x}_s(t) \quad (V.33)$$

Posant :

$$L_i = \{\phi_i\}^T [m] \{\Delta\} \quad (V.34)$$

l'Eq. (V.33) devient :

$$p_{pi}(t) = -L_i \ddot{x}_s(t) \quad (V.35)$$

V.2.3. Réponse sismique temporelle :

Les méthodes exposées dans les chapitres précédents (Méthodes Analytiques, Intégrale de Duhamel, Transformée de Fourier et Méthode Temporelle pas à pas) permettent d'obtenir la solution des SSDDL.

En particulier, la réponse en régime permanent (temporelle) obtenue par l'intégrale de Duhamel s'écrit comme suit :

$$Z_i(t) = \frac{-L_i}{m_{pi} \omega_{Di}} \int_0^t \ddot{x}_s(\tau) e^{-\xi_i \omega_i \tau} \sin \omega_{Di}(t - \tau) d\tau \quad (V.36)$$

Posant :

$$a_i = \frac{L_i}{m_{pi}} = \frac{\{\phi_i\}^T [m] \{\Delta\}}{\{\phi_i\}^T [m] \{\phi_i\}} \quad (V.37)$$

Le déplacement dans le mode i , noté $\{x_{ri}(t)\}$, s'écrit comme suit :

$$\{x_{ri}(t)\} = \{\phi_i\} Z_i(t) = a_i \{\phi_i\} q_i(t) \quad (V.38)$$

Avec :

$$q_i(t) = \frac{-1}{\omega_{Di}} \int_0^t \ddot{x}_s(\tau) e^{-\xi_i \omega_i \tau} \sin \omega_{Di}(t - \tau) d\tau \quad (V.39)$$

Où :

a_i : est appelé le facteur de participation modale,

$q_i(t)$: est la solution de l'équation différentielle suivant :

$$\ddot{q}_i(t) + 2\omega_i \xi_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \ddot{x}_s(t) \quad (V40)$$

La réponse en déplacement dans le mode i étant déterminée, la force élastique dans le système s'obtient par :

$$F_{k,i}(t) = [k]\{x_{ri}(t)\} = a_i \omega_i^2 [m]\{\phi_i\} q_i(t) \quad (\text{V.41})$$

La force total résultant de la superposition de l'ensemble des modes s'écrit comme suit :

$$F_k(t) = \sum_{i=1}^n F_{k,i}(t) = \sum_{i=1}^n a_i [k]\{\phi_i\} q_i(t) \quad (\text{V.42})$$

Propriété du facteur de participation modale :

De la relation (V.37), il est remarquable que le facteur a_i dépend de la norme adoptée pour le mode propre $\{\phi_i\}$.

La propriété relative aux facteurs de participation s'écrit comme suit :

$$\sum_{i=1}^n a_i \{\phi_i\} = \{\Delta\} \quad (\text{V.43})$$

qui s'obtient immédiatement en prémultipliant l'Eq (V.41) par $\{\phi_j\}^T [m]$ et en tenant compte de la propriété d'orthogonalité des modes propres et de la relation (V.37) :

$$\{\phi_j\}^T [m] \sum_{i=1}^n a_i \{\phi_i\} = \{\phi_j\}^T [m] \{\phi_j\} a_j = \{\phi_j\}^T [m] \{\Delta\} \quad (\text{V.44})$$

Une fois la réponse de chaque mode déterminée, le déplacement total s'obtient par sommation sur l'ensemble des modes :

$$\{x_r(t)\} = \sum_{i=1}^n \{x_{ri}(t)\} = \sum_{i=1}^n a_i \{\phi_i\} q_i(t) \quad (\text{V.45})$$

Après la détermination de la réponse en déplacement dans le mode i , la force élastique du système s'obtient comme suit :

$$f_k = [k]\{x_{ri}(t)\} = a_i [k]\{\phi_i\} q_i(t) = a_i \omega_i^2 [m]\{\phi_i\} q_i(t) \quad (\text{V.46})$$

La force élastique total résultant de la superposition de l'ensemble des modes s'écrit comme suit :

$$\{f_k\} = \sum_{i=1}^n f_{ki} = \sum_{i=1}^n a_i \omega_i^2 [m]\{\phi_i\} q_i(t) \quad (\text{V.47})$$

V.4 Méthode dynamique modale spectrale

Par cette méthode, il est recherché pour chaque mode de vibration, le maximum des effets induits dans la structure par les forces sismiques représentées par un spectre de réponse de calcul. Ces effets sont par la suite combinés pour obtenir la réponse de la structure.

V.4.1 Réponse modale spectrale

Pour le dimensionnement d'un système, la connaissance de la variation temporelle de la réponse n'est pas obligatoirement nécessaire et seule la **valeur maximale** est requise.

L'**analyse spectrale** permet d'avoir directement cette grandeur pour chaque mode.

V.4.1.1 Valeur maximale de la réponse par mode

Revenant à l'Eq. (V.38), pour obtenir directement $\{x_{ri}(t)\}_{max}$, il suffit d'avoir $(Z_i(t))_{max}$, soit $(q_i(t))_{max}$:

$$\{x_{ri}(t)\}_{max} = \{\phi_i\}Z_{i,max}(t) = a_i\{\phi_i\}q_{i,max}(t) \quad (V.48)$$

Avec :

$$q_{i,max}(t) = \text{Max} \left(\frac{-1}{\omega_{Di}} \int_0^t \ddot{x}_s(\tau) e^{-\xi_i \omega_i t} \sin \omega_{Di}(t - \tau) d\tau \right) \quad (V.49)$$

La courbe qui donne directement ce déplacement maximal à partir d'un mouvement sismique est appelée **spectre de réponse**. Donc le spectre de réponse relative en déplacement s'écrit comme suit :

$$s_D(\omega_i, \xi_i) = \text{Max} \left(\frac{-1}{\omega_{Di}} \int_0^t \ddot{x}_s(\tau) e^{-\xi_i \omega_i t} \sin \omega_{Di}(t - \tau) d\tau \right) \quad (V.50)$$

Donc, le déplacement maximal pour un mode i peut s'écrire encore comme suit :

$$\{x_{ri}(t)\}_{max} = a_i\{\phi_i\}q_{i,max}(t) = a_i\{\phi_i\}s_D(\omega_i, \xi_i) \quad (V.51)$$

Revenant à la relation entre les trois grandeurs spectrales :

$$s_D = \frac{s_V}{\omega} = \frac{s_A}{\omega^2} \quad (V.52)$$

On peut écrire aussi :

- Spectre de vitesse relative : $s_V = \frac{s_A}{\omega} = \omega s_D = \omega \dot{q}_{imax}(t)$
- Spectre d'accélération relatif : $s_A = \omega^2 s_D = \omega \ddot{q}_{imax}(t)$

Remplaçant l'Eq. (V.52) dans l'Eq (V.51), le déplacement maximal en fonction de la vitesse peut s'écrire comme suit :

$$\{x_{ri}(t)\}_{max} = \frac{a_i}{\omega_i} \{\phi_i\} s_V(\omega_i, \xi_i) \quad (V.53)$$

Ou bien en fonction d'accélération :

$$\{x_{ri}(t)\}_{max} = \frac{a_i}{\omega_i^2} \{\phi_i\} s_A(\omega_i, \xi_i) \quad (V.54)$$

La force élastique maximal dans le mode i est alors donnée par :

$$\{x_{ri}(t)\}_{max} = a_i [m] \{\phi_i\} s_A(\omega_i, \xi_i) \quad (V.55)$$

V.4.1.2 Valeur maximale de la réponse totale

L'utilisation du spectre de réponse ne permet d'accéder qu'à la valeur maximale de la réponse dans chaque mode. Ces maximums ne se produisent pas tous au même instant et se pose alors le problème du cumul des réponses modales.

Désignant par $\{r\}$ le vecteur contenant les réponses modales maximales (déplacement en un point, effort, contrainte dans un élément...). La réponse maximale pour l'ensemble des modes est évidemment obtenue en effectuant la somme des valeurs absolues maximales des réponses modales :

$$r_{max} = \sum_{i=1}^n |r_{i,max}| \quad (V.56)$$

Cette approche peut conduire à une surestimation importante de la réponse.

La règle de combinaison quadratique dite SRSS (Square root of sum of squares) exprime la réponse maximale sous la forme :

$$r_{max} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (r_{i,max})^2} \quad (V.57)$$

Cette approximation est valable si les fréquences propres des modes sont suffisamment éloignées :

$$0.9 \leq \frac{\omega_i}{\omega_j} \leq 1.1 \quad (V.58)$$

V.4.2 Choix du nombre de modes

Un système à NDDL procède N modes propres et N fréquences propres. En général, les modes de fréquence élevée contribuent faiblement à la réponse. La question posée est celle du choix du nombre de modes à retenir dans l'analyse pour le calcul de la réponse totale.

A cette fin, on introduit le paramètre m_i' , dénommé **masse modale** :

$$m_i'' = \frac{L_i^2}{m_{pi}} = \frac{(\{\phi_i\}^T [m] \{\Delta\})^2}{\{\phi_i\}^T [m] \{\phi_i\}} \quad (V.59)$$

dans laquelle, m_i'' est indépendante de la normalisation des modes propres.

la masse totale mobilisée de la structure dans la direction $\{\Delta\}$ est égale à la somme des masses modales :

$$M_T = \{\Delta\}^T [m] \{\Delta\} = \sum_{i=1}^n m_i'' \quad (\text{V. 60})$$

Donc chaque mode a une contribution massique par rapport à la masse totale.

En pratique, le nombre de mode k suffisant pour une analyse dynamique par superposition modale doit vérifier la relation suivante :

$$\sum_{i=1}^k m_i'' \geq 0.9 M_T \quad (\text{V. 61})$$

tel que : $k \ll n$

V.4.3 Spectre de réponse élastique

Les **spectres de réponse** sont permettent de représenter l'exigence de réponse sismique imposée aux structures, il peut être obtenu à partir d'un enregistrement du mouvement du sol (séisme), et les **spectres de conception** servent de référence pour le dimensionnement parasismique des structures.

Les spectres de réponse doivent être calculés pour toutes les périodes et les taux d'amortissement susceptibles d'être trouvés dans les structures.

Les spectres de réponse montrent généralement des zones spectrales caractérisant la sensibilité de la réponse à différents mouvements, c'est-à-dire qu'ils montrent une région sensible à l'accélération (petites périodes), une région sensible au déplacement (grandes périodes) et une région sensible à la vitesse s'étendant entre les deux.

Les spectres de conception sont définis sur la base des spectres de réponse moyens.

Pour cette raison, les valeurs spectrales des spectres à réponse unique peuvent différer significativement des spectres normatifs de conception.

V.4.3.1 Détermination du spectre de réponse

Le mouvement sismique dû à un séisme en un point donné de la surface du sol est représenté par un spectre de réponse, dénommé, **spectre de réponse élastique**.

Le **comportement ductile ou non linéaire** de la structure est pris en compte par une analyse élastique fondée sur un spectre de réponse atténué par rapport au spectre de réponse élastique grâce à l'introduction d'un coefficient de comportement R . Le spectre utilisé dans ce cas est dénommé **spectre de calcul ou de dimensionnement**.

Limites du spectre de réponse :

La Figure V-2 montre deux cas différents, l'un présente une structure infiniment rigide et l'autre infiniment souple.

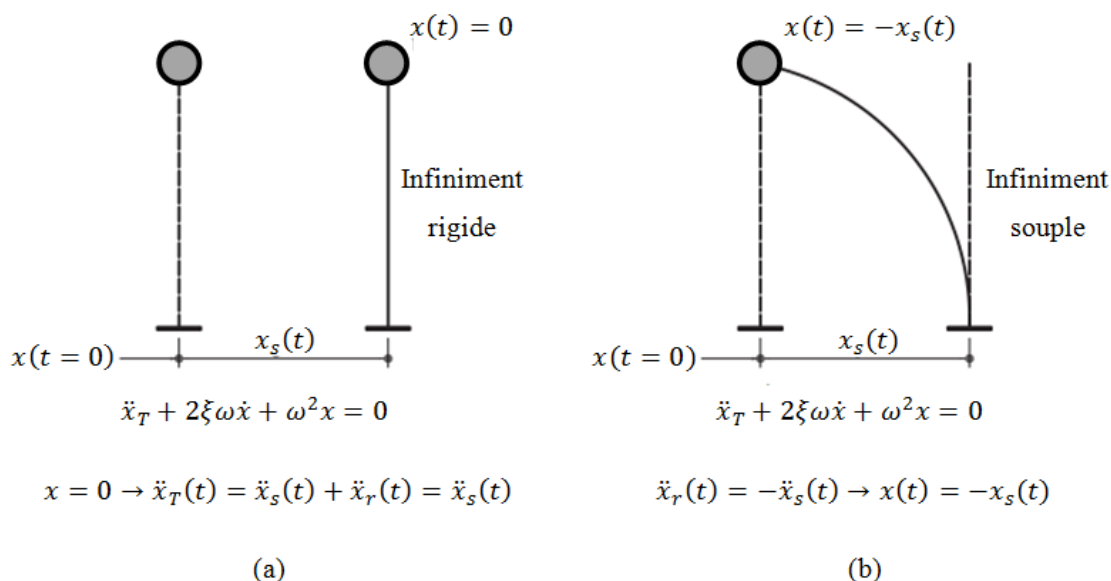


Figure V-2. Limites du spectre de réponse : (a) structure infiniment rigide, (b) structure infiniment souple.

Une structure supposée infiniment rigide présente de hautes fréquences ($f > 25\text{Hz}$) pour lesquelles l'accélération maximale de la masse coïncide avec celle du sol.

Une structure supposée infiniment souple possède des basses fréquences où le déplacement relatif maximal est égal au déplacement maximal du sol.

V.4.4 Méthode dynamique modale spectrale suivant le Règlement Parasismique Algérienne (RPA99 version 2003)

V.4.4.1 Modélisation

1) Structures régulières en plan comportant des planchers rigides :

L'analyse est faite séparément dans chacune des deux directions principales du bâtiment. Celui-ci est alors représenté dans chacune des deux directions de calcul par un modèle plan, encastré à la base et , avec une concentration des masses au niveau des centres de gravité des planchers avec un seul DDL en translation horizontale.

2) Structures irrégulières en plan, sujettes à la torsion et comportant des planchers rigides :

Elles sont représentées par un modèle tridimensionnel, encastré à la base, avec une concentration des masses au niveau des centres de gravité des planchers avec trois (03) DDL (2 translations horizontales et une rotation d'axe vertical).

3) Structures régulières ou non comportant des planchers flexibles :

Elles sont représentées par des modèles tridimensionnels encastres à la base et à plusieurs DDL par plancher.

4) Déformabilité du sol de fondation :

Elle doit être prise en compte dans le modèle chaque fois que son influence sur la réponse structurale est significative.

5) Modèle de bâtiment à utiliser :

Il doit représenter au mieux les distributions des rigidités et des masses de façon à prendre en compte tous les modes de déformation significatifs dans le calcul des forces d'inertie sismiques (ex : contribution des zones nodales et des éléments non structuraux à la rigidité du bâtiment).

6) La rigidité dans les bâtiments en béton armé ou en maçonnerie :

La rigidité des éléments porteurs doit être calculée en considérant les sections non fissurées. Si les déplacements sont critiques particulièrement dans le cas de structures associées à des valeurs élevées du coefficient de comportement, une estimation plus précise de la rigidité devient nécessaire par la prise en compte de sections fissurées.

7) L'action sismique :

Elle doit être appliquée dans toutes les directions jugées déterminantes pour le calcul des forces sismiques ainsi que les directions qui leur sont perpendiculaires, compte tenu de la configuration en plan de la structure.

8) Directions d'excitation :

Pour les structures ayant leurs éléments de contreventement distribués le long de deux directions orthogonales, ces deux directions sont à retenir comme directions d'excitation.

V.4.4.2 Spectre de réponse réglementaire :

Dans le RPA99 version 2003, l'action sismique est définie par le Spectre de réponse de calcul suivant :

$$\frac{s_A}{g} = \begin{cases} 1.25A \left(1 + \frac{T}{T_1} \left(2.5\eta \frac{Q}{R} - 1 \right) \right) & 0 \leq T \leq T_1 \\ 2.5\eta(1.25A) \left(\frac{Q}{R} \right) & T_1 \leq T \leq T_2 \\ 2.5\eta(1.25A) \left(\frac{Q}{R} \right) \left(\frac{T_2}{T} \right)^{2/3} & T_2 \leq T \leq 3.0s \\ 2.5\eta(1.25A) \left(\frac{T_2}{3} \right)^{2/3} \left(\frac{3}{T} \right)^{5/3} \left(\frac{Q}{R} \right) & T > 3.0s \end{cases} \quad (V.62)$$

Où :

A : Coefficient d'accélération de zone,

η : Facteur de correction d'amortissement,

R : Coefficient de comportement de la structure,

T_1 et T_2 : Périodes caractéristiques associées à la catégorie de site,

Q : facteur de qualité.

Un exemple de spectre de réponse en fonction du site suivant le RPA99 version 2003 est illustré dans la Figure V-3.

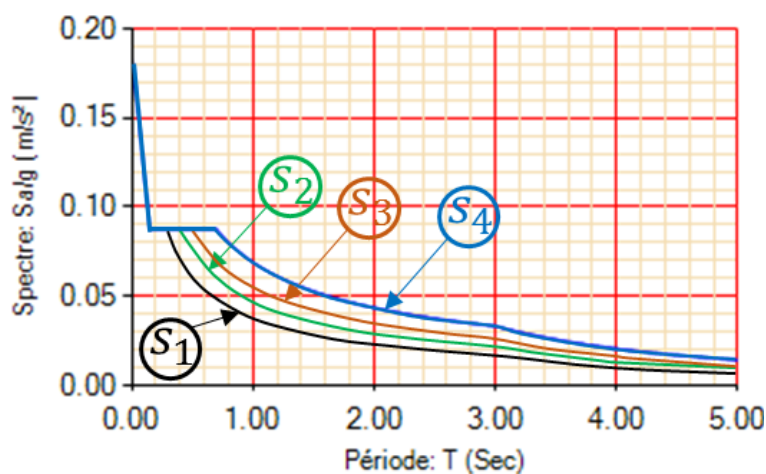


Figure V-3. Exemple de spectre de réponse en fonction du Site 1 ; Zone 1 ; Groupe A1 ; Béton armé léger ; Portiques autostables sans remplissages en maçonnerie rigide).

Le spectre de calcul peut être généré à l'aide d'un logiciel simple à utiliser, par saisie des paramètres requis, comme illustré à la Figure V-4.

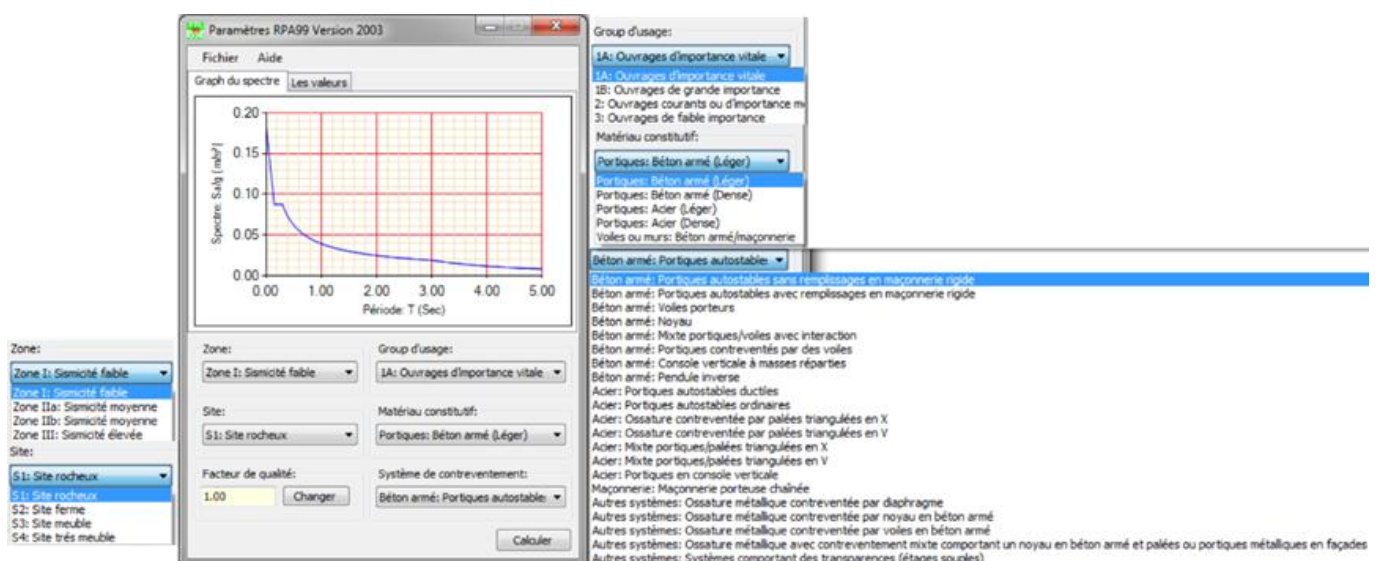


Figure V-4. Exemple de conception de spectre de réponse suivant le RPA99 V2003.

V.4.4.3 Détermination des paramètres de spectre de réponse

a) Coefficient d'accélération de zone :

Le coefficient d'accélération de zone est déterminé en fonction de la classification sismique de la zone et du groupe d'importance de l'ouvrage.

– Classification des zones sismiques :

Le territoire national est divisé en quatre zones de sismicité croissante, définies sur la carte des zones sismiques de l'Algérie la répartition de ces zones par wilaya et par commune, soit :

- Zone O : sismicité négligeable
- Zone I : sismicité faible
- Zone II : sismicité moyenne
- Zone III : sismicité élevée

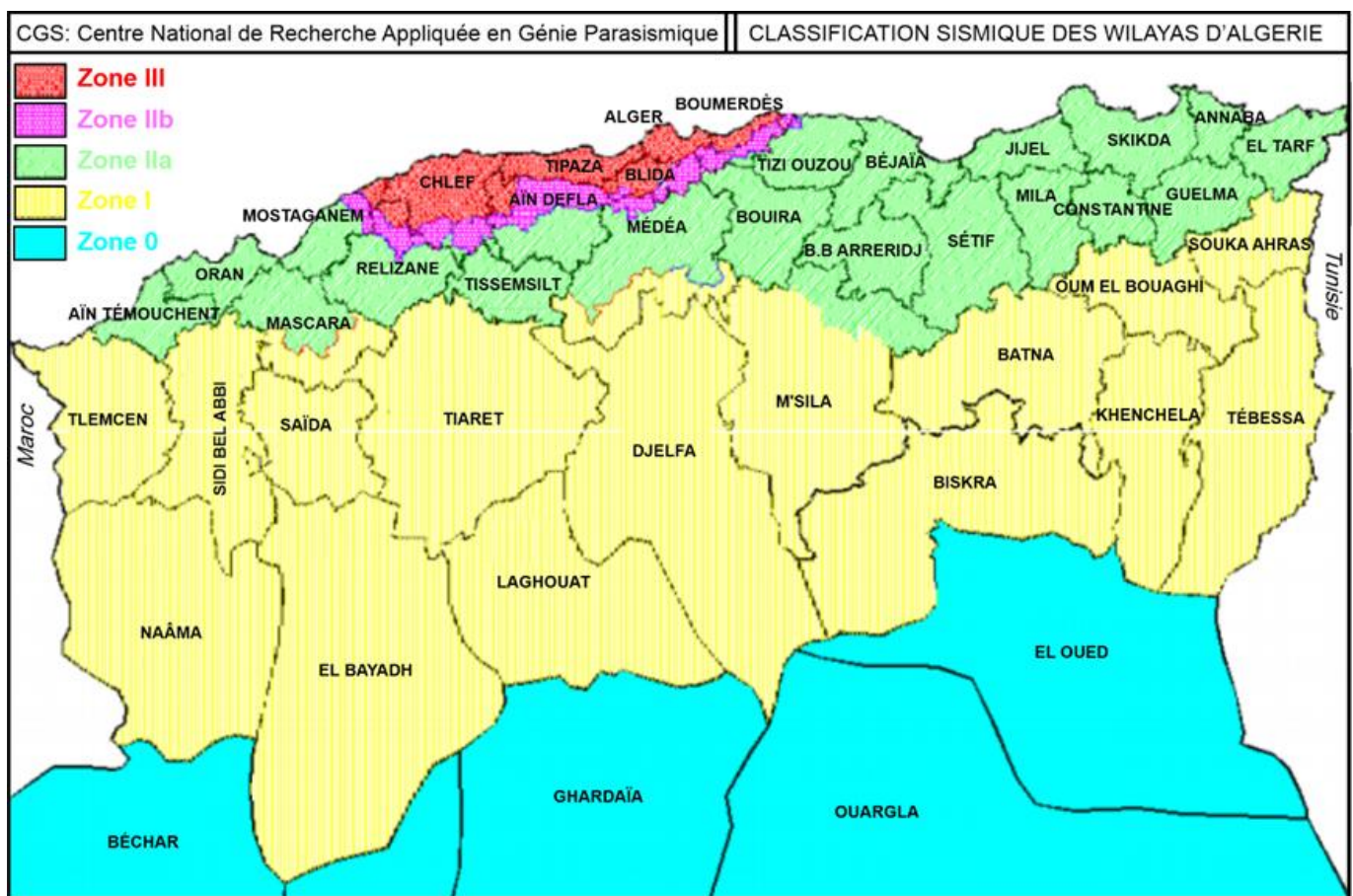


Figure V-5. Carte de zonage sismique de l'Algérie.

– Classification des ouvrages selon leur importance :

Le niveau minimal de protection sismique accordé à un ouvrage dépend de sa destination et de son importance vis à vis des objectifs de protection fixés par la collectivité.

Tout ouvrage soumis au champ d'application du RPA doit être classé dans l'un des quatre groupes définis dans le Tableau. V-1.

Tableau V-1. Classification des ouvrages selon leur importance.

Groupe	Ouvrages	Domaine d'application
1A	Importance vitale	Ouvrages vitaux qui doivent demeurer opérationnels après un séisme majeur pour les besoins de la survie de la région, de la sécurité publique et de la défense nationale, soit : – Centres de décisions stratégiques – Bâtiments abritant le personnel et le matériel de secours et (ou) de défense nationale (casernes de pompiers, de police ou militaires, parcs d'engins et de véhicules d'intervention d'urgence et de secours – Etablissements publics de santé (hôpitaux et centres dotés. – Etablissements publics de communications tels que les centres de télécommunications, de diffusion et de réception de l'information (radio et télévision), des relais hertziens, des tours de contrôle des aéroports et contrôle de la circulation aérienne. – Bâtiments de production et de stockage d'eau potable d'importance vitale – Ouvrages publics à caractère culturel, ou historique d'importance nationale – Centres de production ou de distribution d'énergie, d'importance nationale – Bâtiments administratifs ou autre devant rester fonctionnels en cas de séisme
1B	Grande importance	Ouvrages abritant fréquemment de grands rassemblements de personnes : – Bâtiments recevant du public plus de 300 personnes (grande mosquée, bâtiments à usage de bureaux, bâtiments industriels et commerciaux, scolaires, universitaires, constructions sportives et culturelles, pénitenciers, grands hôtels). – Bâtiments d'habitation collective ou à usage de bureaux dont la hauteur dépasse 48 m. Ouvrages publics d'intérêt national ou ayant une importance socioculturelle et économique certaine. – Bâtiments de bibliothèque ou d'archives d'importance régionale, musée, etc. – Etablissements sanitaires autres que ceux du groupe 1A – Centres de production ou de distribution d'énergie autres que ceux du groupe 1A – Châteaux d'eau et réservoirs de grande à moyenne importance
2	Courants ou d'importance moyenne	– Bâtiments d'habitation collective ou à usage de bureaux dont la hauteur ne dépasse pas 48 m. – Autres bâtiments pouvant accueillir au plus 300 personnes simultanément tels que, bâtiments à usage de bureaux, bâtiments industriels, ... – Parkings de stationnement publics, ...
3	Faible importance	– Bâtiments industriels ou agricoles abritant des biens de faibles valeurs. – Bâtiments à risque limité pour les personnes – Constructions provisoires

Après ces classifications, le coefficient d'accélération de zone est donné dans le Tableau V-2.

Tableau V-2. Coefficient d'accélération de zone.

Groupe	Zone			
	I	IIa	IIb	III
1A	0.15	0.25	0.30	0.40
1B	0.12	0.20	0.25	0.30
2	0.10	0.15	0.20	0.25
3	0.07	0.10	0.14	0.18

b) Facteur de correction d'amortissement :

Le facteur de correction d'amortissement quand l'amortissement est différent de 5%, donné par la formule :

$$\eta = \sqrt{\frac{7}{2 + \xi}} \geq 0.7 \quad (\text{V. 63})$$

Où $\xi(\%)$ est le pourcentage d'amortissement critique fonction du matériau constitutif, du type de structure et de l'importance des remplissages. pour $\xi = 5$ on a $\eta = 1$

Les valeurs du pourcentage d'amortissement critique sont données au (dans le) Tableau V-3.

Tableau V-3. Valeurs de $\xi(\%)$.

Remplissage	Portiques		Voiles ou murs
	Béton armé	Acier	Béton armé/maçonnerie
Léger	6	4	10
Dense	7	5	

c) Coefficient de comportement de la structure :

Les valeurs du coefficient de comportement de la structure sont données par le Tableau V-4 en fonction du système de contreventement. En cas d'utilisation de systèmes de contreventement différents dans les deux directions considérées il y a lieu d'adopter pour le coefficient R la valeur la plus petite.

Tableau V-4. Valeurs du coefficient de comportement R.

Catégorie	Description du système de contreventement	Valeur de R
A	Béton armé	
1a	Portiques autostables sans remplissages en maçonnerie rigide	5
1b	Portiques autostables avec remplissages en maçonnerie rigide	3.5
2	Voiles porteurs	3.5
3	Noyau	3.5
4a	Mixte portiques/voiles avec interaction	5
4b	Portiques contreventés par des voiles	4
5	Console verticale à masses réparties	2
6	Pendule inverse	2

B	Acier	
7	Portiques autostables ductiles	6
8	Portiques autostables ordinaires	4
9a	Ossature contreventée par palées triangulées en X	4
9b	Ossature contreventée par palées triangulées en V	3
10a	Mixte portiques/palées triangulées en X	5
10b	Mixte portiques/palées triangulées en V	4
11	Portiques en console verticale	2
C	Maçonnerie	
12	Maçonnerie porteuse chaînée	2.5
D	Autres systèmes	
13	Ossature métallique contreventée par diaphragme	2
14	Ossature métallique contreventée par noyau en béton armé	3
15	Ossature métallique contreventée par voiles en béton armé	3.5
16	Ossature métallique avec contreventement mixte comportant un noyau en béton armé et palées ou portiques métalliques en façades	4
17	Systèmes comportant des transparences (étages souples)	2

d) Périodes caractéristiques associées à la catégorie de site :

– Classification des sites :

Les sites sont classés en quatre (04) catégories en fonction des propriétés mécaniques des sols qui les constituent comme suit :

- **Catégorie S₁** (site rocheux) :

Roche ou autre formation géologique caractérisée par une vitesse moyenne d'onde de cisaillement ($V_s \geq 800$ m/s).

- **Catégorie S₂** (site ferme) :

Dépôts de sables et de graviers très denses et/ou d'argile sur consolidée sur 10 à 20 m d'épaisseur avec $V_s \geq 400$ m/s à partir de 10 m de profondeur.

- **Catégorie S₃** (site meuble) :

Dépôts épais de sables et graviers moyennement denses ou d'argile moyennement raide avec $V_s \geq 200$ m/s à partir de 10 m de profondeur.

- **Catégorie S₄** (site très meuble) :

- Dépôts de sables lâches avec ou sans présence de couches d'argile molle avec $V_s < 200$ m/s dans les 20 premiers mètres.
- Dépôts d'argile molle à moyennement raide avec $V_s < 200$ m/s dans les 20 premiers mètres.

Après cette classification, les périodes caractéristiques associées à la catégorie de site sont données au Tableau V-5.

Tableau V-5. Valeurs de T_1 et T_2 .

Site	S_1	S_2	S_3	S_4
$T_1(sec)$	0.15	0.15	0.15	0.15
$T_2(sec)$	0.30	0.40	0.50	0.70

e) Facteur de qualité Q :

Le facteur de qualité de la structure est fonction de :

- La redondance et de la géométrie des éléments qui la constituent,
- La régularité en plan et en élévation,
- La qualité du contrôle de la construction.

La valeur de Q est déterminée par la formule :

$$Q = 1 + \sum_{1}^5 P_q \quad (V. 64)$$

Où P_q est la pénalité à retenir selon que le critère de qualité q "est satisfait ou non". Sa valeur est donnée au Tableau V-6.

Tableau V-6. Valeurs des pénalités P_q .

Critère "q"	P_q	
	Observé	N/Observé
1. Conditions minimales sur les files de contreventement	0	0.05
2. Redondance en plan	0	0.05
3. Régularité en plan	0	0.05
4. Régularité en élévation	0	0.05
5. Contrôle de la qualité des matériaux	0	0.05
6. Contrôle de la qualité de l'exécution	0	0.10

Les critères de qualité "q" à vérifier sont :

1. Conditions minimales sur les files de contreventement :

- Système de portiques : chaque file de portique doit comporter à tous les niveaux, au moins trois (03) travées dont le rapport des portées n'excède pas 1,5. Les travées de portique peuvent être constituées de voiles de contreventement.
- Système de voiles : chaque file de voiles doit comporter à tous les niveaux, au moins un (01) trumeau ayant un rapport "hauteur d'étage sur largeur" inférieur ou égal à 0,67 ou bien deux (02) trumeaux ayant un rapport "hauteur d'étage sur largeur" inférieur ou égal à 1,0. Ces trumeaux doivent s'élever sur toute la hauteur de l'étage et ne doivent avoir aucune ouverture ou perforation qui puisse réduire de manière significative leur résistance ou leur rigidité.

2. Redondance en plan :

Chaque étage devra avoir, en plan, au moins quatre (04) files de portiques et/ou de voiles dans la direction des forces latérales appliquées.

Ces files de contreventement devront être disposées symétriquement autant que possible avec un rapport entre valeurs maximale et minimale d'espacement ne dépassant pas 1,5.

3. Régularité en plan :

La structure est classée régulière en plan.

4. Régularité en élévation :

La structure est classée régulière en élévation.

5. Contrôle de la qualité des matériaux :

Des essais systématiques sur les matériaux mis en œuvre doivent être réalisés par l'entreprise.

6. Contrôle de la qualité de l'exécution :

Il est prévu contractuellement une mission de suivi des travaux sur chantier. Cette mission doit comprendre notamment une supervision des essais effectués sur les matériaux.

V.4.4.4 Nombre de modes à considérer

a) Pour les structures représentées par des modèles plans dans deux directions orthogonales, le nombre de modes de vibration à retenir dans chacune des deux directions d'excitation doit être tel que:

- La somme des masses modales effectives pour les modes retenus soit égale à 90 % au moins de la masse totale de la structure.
- Ou que tous les modes ayant une masse modale effective supérieure à 5% de la masse totale de la structure soient retenus pour la détermination de la réponse totale de la structure.

Le minimum de modes à retenir est de trois (03) dans chaque direction considérée.

b) Dans le cas où les conditions décrites ci-dessus ne peuvent pas être satisfaites à cause de l'influence importante des modes de torsion, le nombre minimal de modes (K) à retenir doit être tel que:

$$K \geq 3\sqrt{N} \text{ et } T_K \leq 0.20 \text{ sec} \quad (\text{V. 65})$$

Où : N est le nombre de niveaux au-dessus du sol et T_K la période du mode K .

V.4.4.5 Combinaison des réponses modales

Les réponses de deux modes de vibration i et j de périodes T_i, T_j et d'amortissement ξ_i, ξ_j sont considérées comme indépendantes si le rapport $r = T_i/T_j$ ($T_i \leq T_j$) vérifie :

$$r \leq \frac{10}{10 + \sqrt{\xi_i \xi_j}} \quad (\text{V.66})$$

Dans ce cas, la réponse totale est donnée par :

$$E = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^k E_i^2} \quad (\text{V.67})$$

Où E_i est la valeur modale de E selon le mode « i ».

Dans le cas où deux réponses modales ne sont pas indépendantes ; E_1 et E_2 par exemple, la réponse totale est donnée par :

$$E = \pm \sqrt{(|E_1| + |E_2|) + \sum_{i=3}^k E_i^2} \quad (\text{V.68})$$

V.4.4.6 Résultante des forces sismiques de calcul

La résultante des forces sismiques à la base V_t obtenue par combinaison des valeurs modales ne doit pas être inférieure à 80 % de la résultante des forces sismiques déterminée par la méthode statique équivalente V pour une valeur de la période fondamentale donnée par la formule empirique appropriée.

Si $V_t < 0.80V$, il faudra augmenter tous les paramètres de la réponse (forces, déplacements, moments, ...) dans le rapport $0.80 V/V_t$.

V.4.4.7 Effets de la torsion accidentelle

Pour toutes les structures comportant des planchers ou diaphragmes horizontaux rigides dans leur plan, on supposera qu'à chaque niveau et dans chaque direction, la résultante des forces horizontales a une excentricité par rapport au centre de torsion égale à la plus grande des deux valeurs :

- 5% de la plus grande dimension du bâtiment à ce niveau (cette excentricité doit être prise en considération de part et d'autre du centre de torsion),
- Excentricité théorique résultant des plans.

V.5 Méthode statique équivalente

V.5.1 Principe de la méthode

Les forces réelles dynamiques qui se développent dans la construction sont remplacées par un système de forces statiques fictives dont les effets sont considérés équivalents à ceux de l'action sismique.

Le mouvement du sol peut se faire dans une direction quelconque dans le plan horizontal. Les forces sismiques horizontales équivalentes seront considérées appliquées successivement suivant deux directions orthogonales caractéristiques choisies par le projeteur. Dans le cas général, ces deux directions sont les axes principaux du plan horizontal de la structure.

Il faut souligner toutefois que les forces et les déformations obtenues pour l'élément à partir des méthodes d'analyse statiques pour les charges de conception recommandées sont inférieures aux forces et aux déformations qui seraient observées sur la structure sous les effets d'un séisme majeur pour lequel les charges ont été spécifiées. Ce dépassement des forces est équilibré par le comportement ductile qui est fourni par les détails de construction de l'élément.

V.5.2 Conditions d'application de la méthode

La méthode statique équivalente peut être utilisée dans les conditions suivantes :

- a) Le bâtiment ou bloc étudié, satisfaisait aux conditions de régularité en plan et en élévation prescrites au chapitre III, paragraphe 3.5 avec une hauteur au plus égale à 65m en zones I et II et à 30m en zones III,
- b) Le bâtiment ou bloc étudié présente une configuration irrégulière tout en respectant, outres les conditions de hauteur énoncées en a), les conditions complémentaires suivantes :

Zone I :

- Tous groupes

Zone II :

- Groupe d'usage 3
- Groupe d'usage 2, si la hauteur est inférieure ou égale à 7 niveaux ou 23m.
- Groupe d'usage 1B, si la hauteur est inférieure ou égale à 5 niveaux ou 17m.
- Groupe d'usage 1A, si la hauteur est inférieure ou égale à 3 niveaux ou 10m.

Zone III :

- Groupes d'usage 3 et 2, si hauteur est inférieure ou égale à 5 niveaux ou 17m.
- Groupe d'usage 1B, si la hauteur est inférieure ou égale à 3 niveaux ou 10m.
- Groupe d'usage 1A, si la hauteur est inférieure ou égale à 2 niveaux ou 08m.

V.5.3 Modélisation

- Le modèle du bâtiment à utiliser dans chacune des deux directions de calcul est plan avec les masses concentrées au centre de gravité des planchers et un seul degré de liberté en translation horizontale par niveau sous réserve que les systèmes de contreventement dans les deux (2) directions puissent être découplés,
- La rigidité latérale des éléments porteurs du système de contreventement est calculée à partir de sections non fissurées pour les structures en béton armé ou en maçonnerie,
- Seul le mode fondamental de vibration de la structure est à considérer dans le calcul de la force sismique totale.

V.5.4 Calcul de la force sismique totale

La force sismique totale V , appliquée à la base de la structure, doit être calculée successivement dans deux directions horizontales orthogonales selon la formule :

$$V = \frac{A \cdot D \cdot Q}{R} W \quad (V.69)$$

Où :

V : Force sismique totale (ou Effort tranchant sismique à la base),

A : Coefficient d'accélération de zone (Voir Tableau V-2),

D : Facteur d'amplification dynamique moyen,

R : Coefficient de comportement de la structure (Voir Tableau V-4),

Q : Facteur de qualité (Voir Tableau V-6),

W : Poids total de la structure.

V.5.4.1 Détermination des éléments de la formule de calcul de la force sismique totale

a) Facteur d'amplification dynamique moyen

Le facteur d'amplification dynamique est en fonction du site, du facteur de correction d'amortissement et de la période (T) fondamentale de la structure. Il calé à un palier horizontal pour les faibles périodes. On peut le déterminer par la formule suivante :

$$D = \begin{cases} 2.5\eta_0 & 0 \leq T \leq T_2 \\ 2.5\eta \left(\frac{T_2}{T}\right)^{2/3} & T_2 \leq T \leq 3.0s \\ 2.5\eta \left(\frac{T_2}{3}\right)^{2/3} \left(\frac{3}{T}\right)^{5/3} & T > 3.0s \end{cases} \quad (V.70)$$

Où :

T_2 : période caractéristique, associée à la catégorie du site (Voir Tableau V-5),

η : facteur de correction d'amortissement (prescrites au paragraphe V.4.4.3 b).

Le facteur D est par ailleurs donné sous forme graphique à la Figure V-6 pour un amortissement $\xi = 5$.

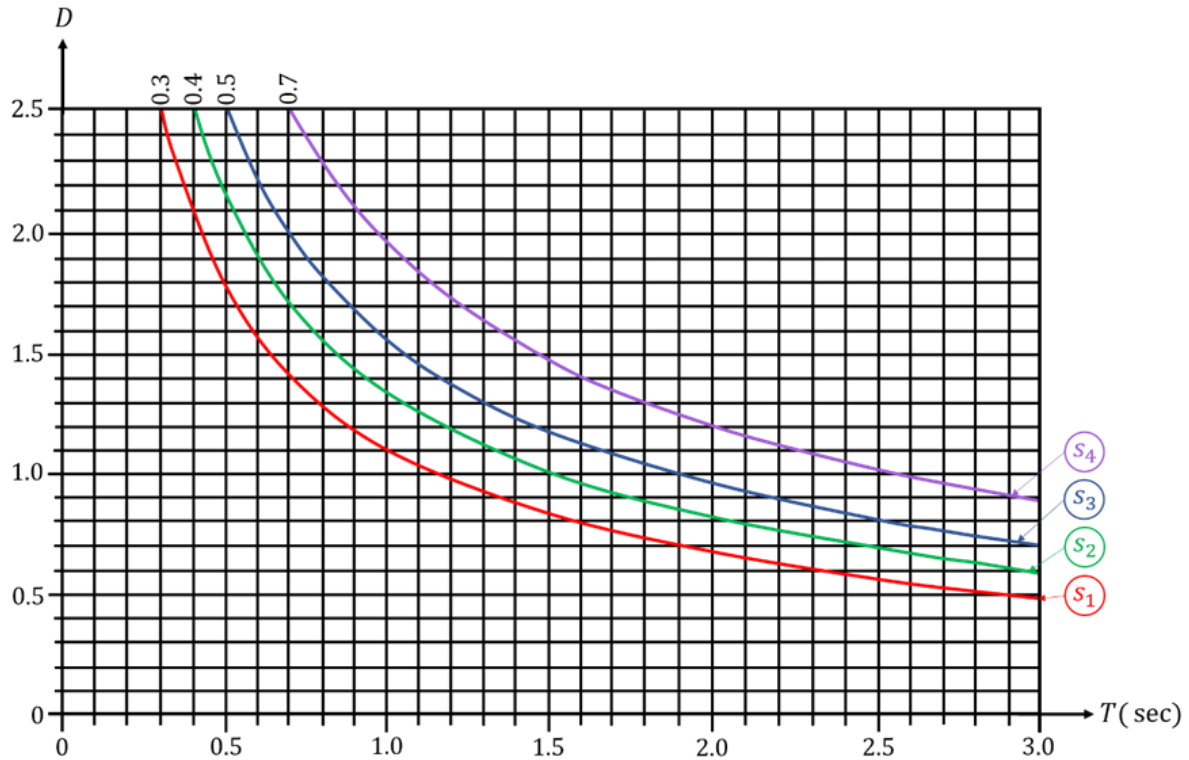


Figure V-6. Facteur d'amplification dynamique moyen D ($\xi = 5$).

b) Poids total de la structure :

Le poids total de la structure (W) est égal à la somme des poids W_i , calculés à chaque niveau (i) :

$$W = \sum_{i=1}^n W_i \text{ avec } W_i = W_{Gi} + \beta W_{Qi} \quad (\text{V.71})$$

Où :

W_{Gi} : Poids dû aux charges permanentes et à celles des équipements fixes éventuels, solidaires de la structure,

W_{Qi} : Charges d'exploitation,

β : Coefficient de pondération, fonction de la nature et de la durée de la charge d'exploitation et donné par le Tableau V-7.

Tableau V-7. Valeurs du coefficient de pondération β .

Cas	Type d'ouvrage	Valeur de β
1	Bâtiments d'habitation, bureaux ou assimilés	0.20
2	Bâtiments recevant du public temporairement : – Salles d'exposition, de sport, lieux de culte, salles de réunions avec places debout. – Salles de classes, restaurants, dortoirs, salles de réunions avec places assises.	0.30 0.40
3	Entrepôts, hangars	0.50
4	Archives, bibliothèques, réservoirs et ouvrages assimilés	1.00
5	Autres locaux non visés ci-dessus	0.60

V.5.5 Estimation de la période fondamentale de la structure

La valeur de la période fondamentale (T) de la structure peut être estimée à partir de formules empiriques ou calculée par des méthodes analytiques ou numériques.

Les formules empiriques à utiliser selon les cas sont les suivantes :

Formule empirique 1 :

$$T = C_T h_N^{3/4} \quad (\text{V. 72})$$

Où :

h_N : Hauteur mesurée en mètres à partir de la base de la structure jusqu'au dernier niveau (N),

C_T : Coefficient, fonction du système de contreventement, du type de remplissage et donné par le Tableau V-8.

Tableau V-8. Valeurs du coefficient C_T .

Cas	Système de contreventement	Valeur de C_T
1	Portiques autostables en béton armé sans remplissage en maçonnerie	0.075
2	Portiques autostables en acier sans remplissage en maçonnerie	0.085
3	Portiques autostables en béton armé ou en acier avec remplissage en maçonnerie	0.050
4	Contreventement assuré partiellement ou totalement par des voiles en béton armé, des palées triangulées et des murs en maçonnerie	0.050

Formule empirique 2 :

Dans les cas 3 et 4, on peut également utiliser aussi la formule :

$$T = 0.09 h_N \sqrt{D} \quad (\text{V. 73})$$

Où :

D : est la dimension du bâtiment mesurée à sa base dans la direction de calcul considérée.

Formule de Rayleigh :

La valeur de T peut être calculée avec la **formule de Rayleigh** :

$$T = 2\pi \frac{\sqrt{(\sum_i^n W_i \delta_i)}}{g(\sum_i^n f_i \delta_i)} \quad (\text{V. 74})$$

Où :

δ_i : Flèches horizontales dues aux forces f_i calculées à partir d'un modèle élastique linéaire de la structure qui prend en compte tous les éléments participant à sa rigidité.

f_i : Système de forces horizontales, distribuées selon les formules de répartition de V suivant la verticale.

La valeur de T peut-être aussi calculée par une version simplifiée de cette formule :

$$T = 2\sqrt{\delta_N} \quad (\text{V. 75})$$

Où :

δ_N : Flèche horizontale au sommet du bâtiment, mesurée en mètres, due aux forces gravitaires appliquées horizontalement.

Remarque :

Les valeurs de la période T , calculées à partir des formules de Rayleigh ou de méthodes numériques ne doivent pas dépasser celles estimées à partir des formules empiriques appropriées de plus de 30%.

V.5.6 Distribution de la résultante des forces sismiques

La résultante des forces sismiques à la base (ou effort tranchant à la base) V doit être distribuée sur la hauteur de la structure selon les formules suivantes :

$$V = F_t + \sum F_i \quad (\text{V. 76})$$

Une part F_t de l'effort tranchant est appliquée au sommet du bâtiment dans les conditions suivantes :

$$\begin{cases} F_t = 0 & \text{si } T \leq 0.7 \text{ sec} \\ F_t = 0.07TV & \text{si } T > 0.7 \text{ sec} \end{cases} \quad (\text{V. 77})$$

La partie restante $(V - F_t)$ est distribué à chaque niveau par :

$$F_i = \frac{(V - F_t)W_i h_i}{\sum_{j=1}^n W_j h_j} \quad (\text{V. 78})$$

Où :

F_i : Force horizontal appliquée au niveau i ,

h_i : Hauteur du niveau i où s'exerce la force F_i ,

h_j : Hauteur du niveau j ,

W_i, W_j : poids revenant aux niveaux i, j .

Remarque :

La valeur de F_t ne dépassera en aucun cas $0,25V$.

V.6 Conclusion

La conception parasismique des structures repose sur des outils de calcul permettant d'évaluer de manière fiable les effets induits par les sollicitations sismiques. Parmi ces outils, la méthode statique équivalente et la méthode dynamique modale spectrale constituent deux approches fondamentales largement utilisées dans la pratique de l'ingénierie structurelle.

La méthode statique équivalente simplifie l'action sismique en un ensemble de forces horizontales fictives équivalentes, appliquées selon une distribution bien définie sur la hauteur de la structure. Cette méthode est particulièrement adaptée aux bâtiments réguliers, de hauteur modérée, et situés dans des zones de sismicité faible à modérée. Sa simplicité en fait un choix courant dans la phase préliminaire des projets.

La méthode dynamique modale spectrale, plus élaborée, prend en compte les propriétés dynamiques globales de la structure, notamment ses modes propres de vibration et ses fréquences naturelles. Elle repose sur l'utilisation des spectres de réponse, qui traduisent l'intensité de la sollicitation sismique en fonction de la période et de l'amortissement. Cette approche permet une meilleure estimation des effets inertiels et des déplacements structurels.

L'application des deux méthodes exige la connaissance et la maîtrise de divers paramètres : la classification sismique du site, les caractéristiques dynamiques de la structure, les coefficients réglementaires (A, R, Q), ainsi que les critères de qualité de la conception et de l'exécution.

Le respect des exigences du RPA99 version 2003 permet d'assurer un dimensionnement conforme, sécurisé et rationnel des ouvrages. Le choix entre les deux méthodes doit être fait selon les conditions d'application, la complexité du bâtiment et les objectifs de performance sismique.

Ainsi, une modélisation rigoureuse et une analyse appropriée permettent d'optimiser la résistance et la ductilité de la structure, tout en garantissant la sécurité des usagers et la durabilité des constructions.

VI. Méthode de la poussée progressive (Pushover)

VI.1 Introduction

L'analyse élastique donne une bonne indication de la capacité élastique des structures et montre où le fléchissement peut d'abord se produire, mais elle ne peut pas prendre en compte la redistribution des efforts durant le fléchissement progressif qui suit et prédire ses mécanismes de défaillance ou détecter la possibilité et l'emplacement de toute défaillance prématurée. Une analyse statique non linéaire peut les prédire plus précisément car elle prend en compte le comportement inélastique de la structure. Elle peut aider à identifier les éléments critiques susceptibles d'atteindre des états critiques lors d'un séisme pour lesquels une attention doit être accordée lors de la conception et des détails.

Pour mieux tenir compte le comportement réel d'une structure sous des charges sismiques, on peut utiliser une méthode simple connue sous le nom *Pushover Analysis* (en anglais) ou la *méthode de la poussée progressive*. Cette méthode peut aider à évaluer le comportement progressif réel de la structure étapes par étapes au fur et à mesure que des dommages y apparaissent, c'est-à-dire elle peut aider à démontrer comment une défaillance progressive dans les structures se produit réellement et identifie le mode de défaillance finale par l'évaluation des différents paramètres en termes de sollicitation et déplacements dans les éléments de la structure.

La *méthode de la poussée progressive* vise notamment à :

- Évaluer les mécanismes plastiques formés et la distribution des dommages dans des structures complexes,
- Évaluer la performance structurale des bâtiments existants ou renforcés,
- Vérifier ou évaluer plus précisément le rapport $\frac{\alpha_u}{\alpha_1}$, coefficient de redistribution plastique qui intervient explicitement dans la valeur du facteur de comportement R des constructions en béton, acier et mixtes acier-béton...etc.,
- Introduire le coefficient de comportement R comme variable au calcul basé sur l'analyse linéaire.

Les paramètres α_1 et α_u :

Les paramètres α_1 et α_u sont définis comme suit :

- α_1 est la valeur par laquelle les actions sismiques horizontales de calcul sont multipliées pour atteindre pour la première fois la résistance plastique dans un élément de la structure, les valeurs de calcul de toutes les autres actions étant maintenues constantes
- α_u est la valeur par laquelle les actions sismiques horizontales de calcul sont multipliées pour que se forment des rotules plastiques dans un nombre suffisant de sections pour que l'instabilité d'ensemble de la structure se développe, les valeurs de calcul de toutes les autres actions étant maintenues constantes.

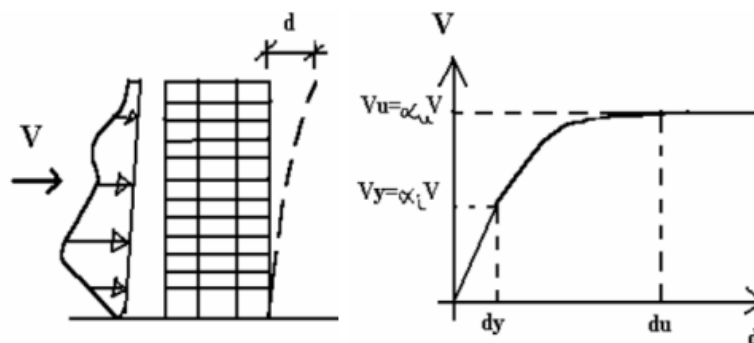


Figure VI-1. Définition des paramètres α_1 et α_u dans l'analyse Pushover.

VI.2 Source de non linéarité

Les sources principales de non linéarité peuvent être classées en deux grandes catégories :

La source géométrique, ou cinématique :

C'est une source majeure de non linéarité due aux grands déplacements accompagnés ou non de grandes déformations ; les phénomènes d'instabilité trouvent leur origine dans cette catégorie.

Le changement dans la géométrie est pris en considération en établissant les équations contraintes-déplacements et les équations d'équilibre.

La source matérielle, ou rhéologique :

C'est une autre source importante de non linéarité, due aux lois de comportement non linéaires des matériaux.

La non linéarité du comportement des matériaux est provoqué par :

- Endommagement du béton,
- Plastification de l'acier,
- Frottement dans les liaisons,
- Etc....

VI.3 Principe de l'analyse Pushover :

Le principe consiste à superposer dans un diagramme accélération-déplacement, une courbe représentant la capacité résistante d'une structure issue d'une analyse Pushover (Analyse statique non-linéaire en poussée progressive) et une courbe représentative de la sollicitation apportée par le séisme (le spectre de réponse élastique "accélération-déplacements"), afin de déterminer le **point de performance (ou point de fonctionnement)** qui permet d'évaluer le déplacement maximal que la structure subira et subséquemment son degré de pénétration dans le domaine plastique.

L'analyse statique Pushover est basée sur la représentation équivalente d'une structure à NDDL par un SDDL, pour cela on définit un déplacement de contrôle (généralement celui du dernier plancher du bâtiment) et un effort de contrôle (l'effort tranchant à la base du bâtiment). Cela indique que la réponse est fondamentalement contrôlée par un seul mode de vibration et la forme de ce mode demeure constante durant la durée du séisme.

A la fin, l'analyse Pushover permet de fournir des informations sur plusieurs caractéristiques (la résistance et la ductilité) de la structure qui ne peuvent pas être obtenues par l'analyse élastique.

Remarque :

Les inconnues du problème sont, le facteur d'amortissement et la période de performance (ou ductilité) de la structure en tenant compte des non-linéarités et irréversibilités subies par le séisme donné.

VI.4 Courbe de Pushover

La courbe de Pushover représente la variation de l'effort tranchant à la base en fonction de déplacement du dernier plancher du bâtiment, c'est une caractérisation du comportement d'un système à PDDL, pour pouvoir trouver le point de performance de la structure il faut transformer cette courbe en *courbe de capacité*.

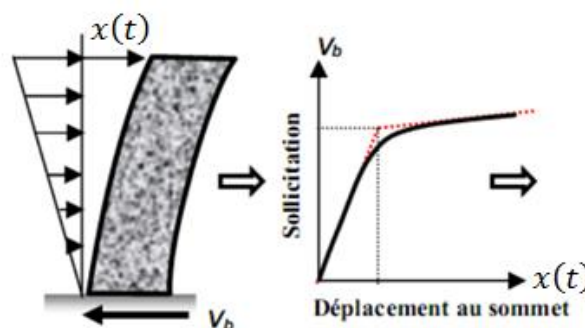


Figure VI-2. Courbe de Pushover.

VI.5 Courbe de capacité :

La courbe de capacité caractérise le comportement global de la structure équivalente à un SDDL ce qui permettra de superposer la courbe de capacité (accélération-déplacement) sur la

courbe de spectre de réponse, la transformation de la courbe Pushover en courbe de capacité part de l'hypothèse que le comportement est gouverné par le premier mode propre.

Pour obtenir cette équivalence on utilisera l'équation d'équilibre dynamique linéaire du système réel soumis à une accélération sismique à sa base $\ddot{x}_s(t)$:

$$[m]\{\ddot{x}_r(t)\} + [c]\{\dot{x}_r(t)\} + [k]\{x_r(t)\} = -[m]\{\Delta\}\ddot{x}_s(t) \quad (\text{VI. 1})$$

Le vecteur de déplacement relatif $\{x_r(t)\}$ peut se mettre sous la forme :

$$\{x_r(t)\} = \sum_{i=1}^n \{\phi_i\} Z_i(t) = [\phi]\{Z(t)\} \quad (\text{VI. 2})$$

Il est nécessaire de savoir les forces et les contraintes sur chaque point de la structure pour cette raison on introduit des forces statiques équivalentes, la caractérisation des forces $\{F\}$ est obtenue en décomposant l'inertie du système on aura donc :

$$[m]\{\Delta\} = \sum_{i=1}^n a_i [m]\{\phi_i\} = \sum_{i=1}^n \{F_i\} \quad (\text{VI. 3})$$

Où :

$\{F_i\}$: représente la distribution des forces sur la structure.

En reportant dans l'Eq. (VI.1), tenant compte des propriétés d'orthogonalité des valeurs et vecteurs propres, on obtient les équations découplées où chaque équation est caractérisée par un seul inconnu $Z_i(t)$:

$$\begin{cases} \ddot{Z}_1(t) + 2\omega_1\xi_1\dot{Z}_1(t) + \omega_1^2 Z_1(t) = -a_1\ddot{x}_s(t) \\ \ddot{Z}_2(t) + 2\omega_2\xi_2\dot{Z}_2(t) + \omega_2^2 Z_2(t) = -a_2\ddot{x}_s(t) \\ \vdots \\ \ddot{Z}_i(t) + 2\omega_i\xi_i\dot{Z}_i(t) + \omega_i^2 Z_i(t) = -a_i\ddot{x}_s(t) \\ \vdots \\ \ddot{Z}_n(t) + 2\omega_n\xi_n\dot{Z}_n(t) + \omega_n^2 Z_n(t) = -a_n\ddot{x}_s(t) \end{cases} \quad (\text{VI. 4})$$

Chaque équation correspond à une équation du mouvement d'un oscillateur simple à un seul DDL.

$$\ddot{Z}_i(t) + 2\omega_i\xi_i\dot{Z}_i(t) + \omega_i^2 Z_i(t) = -a_i\ddot{x}_s(t) \quad (\text{VI. 5})$$

Posant :

$$Z_i(t) = a_i D_i(t) \quad (\text{VI. 6})$$

En remplaçant l'Eq (VI.6) dans l'eq (VI.5), après la simplification le déplacement associé au mode i devient :

$$\ddot{D}_i(t) + 2\omega_i\xi_i\dot{D}_i(t) + \omega_i^2 D_i(t) = -\ddot{x}_s(t) \quad (\text{VI. 7})$$

Les déplacements de la structure originale en fonction des déplacements modaux s'expriment par la relation suivante :

$$\{x_r(t)\} = \sum_{i=1}^n \{\phi_i\} Z_i(t) = \sum_{i=1}^n \{\phi_i\} a_i D_i(t) \quad (\text{VI. 8})$$

Le mouvement est principalement gouverné par le premier mode de vibrations qui fournit une grande participation modale alors :

$$\{x_r(t)\} = \{\phi_1\} a_1 D_1(t) \quad (\text{VI. 9})$$

Pour un instant donné, le déplacement du dernier niveau n (terrasse) est alors donné par :

$$x_t(t) = \phi_{1n} a_1 D_1(t) \quad (\text{VI. 10})$$

Où :

$x_t(t)$: $n^{\text{ième}}$ composante du déplacement $\{x_r(t)\}$

Le déplacement du système équivalent (SDDL) est relié au déplacement de la terrasse de la structure réelle par la relation :

$$D_1(t) = \frac{x_t(t)}{\phi_{1n} a_1} \quad (\text{VI. 11})$$

Le passage de l'effort tranchant à la base de l'analyse Pushover à l'accélération correspondante pour un système d'un seul degré de liberté se fait en considérant les forces statiques équivalentes d'un mode i .

$$\{V_i(t)\} = [k] \{x_{r,i}(t)\} = \omega_i^2 \{F_i\} S_{Ai}(t) \quad (\text{VI. 12})$$

Où :

$F_i = a_i [m] \{\phi_i\}$: représente la distribution des forces dans la structure,

$S_{Ai}(t)$: pseudo-accélération modale.

Pratiquement, si on désire une réponse $a_i(t)$ on peut l'obtenir à partir des résultats a_i^{st} d'une analyse statique équivalente et on a :

$$a_i(t) = S_A(t) a_i^{st} \quad (\text{VI. 13})$$

Dans cette approche l'effort tranchant à la base $V_{st,i}^b$ peut être obtenu en fonction de l'effort induit par les forces $\{F_i\}$:

$$V_{st,i}^b = \sum_{j=1}^n F_{j,i} = \{\Delta^t\} \{F_i\} = a_i \{\Delta^t\} [m] \{\phi_i\}^T = \frac{L_i^2}{m_{pi}} \quad (\text{VI. 14})$$

L'effort tranchant à la base s'écrit alors comme suit :

$$V_b(t) = \sum_{i=1}^n V_{st,i}^b S_{Ai}(t) \approx V_{st,1}^b S_{A1} = \frac{L_1^2}{m_{p1}} S_{A1} \quad (\text{VI. 15})$$

Alors l'effort tranchant à la base s'écrit sous forme d'accélération spectrale lors de la transformation en un système équivalent d'un SDDL et on a :

$$S_{A1} = \frac{V_b}{\frac{L_1^2}{m_{p1}}} = \frac{V_b}{M_1} \quad (\text{VI. 16})$$

Le spectre de déplacement peut s'exprimer en fonction de déplacement du système équivalent comme suit :

$$S_{D1} = \frac{D_1}{a_1} \quad (\text{VI. 17})$$

Le déplacement associé à l'oscillateur à un SDDL en fonction de spectre d'accélération est donné par :

$$S_{D1} = \frac{S_{A1}}{\omega_1} \quad (\text{VI. 18})$$

Donc le déplacement de contrôle est celui du dernier niveau s'exprime comme suit :

$$S_{D1n} = \frac{F_{1n}}{m_n \omega_1^2} = \frac{S_{A1} a_1 \phi_1}{\omega_1^2} \quad (\text{VI. 19})$$

Généralement $\phi_1 = 1$, alors :

$$S_{D1n} = \frac{S_{A1} a_1}{\omega_1^2} = d_n \quad (\text{VI. 20})$$

Par conséquent :

$$S_{D1} = \frac{S_{D1n}}{a_1} = d_1'' \quad (\text{VI. 21})$$

La transformation de la courbe de Pushover (courbe effort tranchant-déplacement au toit) en courbe de capacité (courbe accélération spectrale-déplacement d'un système d'un SDDL) est représentée dans la Figure VI-3.

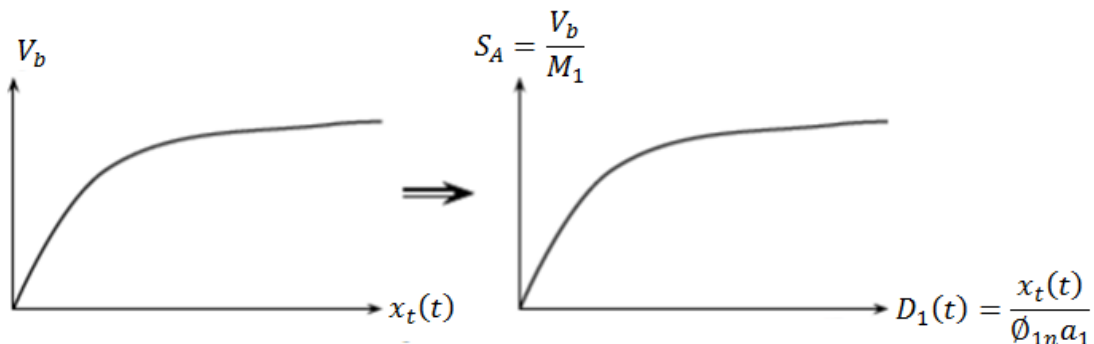


Figure VI-3. Transformation de la courbe de Pushover en courbe de capacité.

VI.6 Loi de comportement

Pour analyser le comportement réel des structures sous sollicitations sismiques croissantes, il est utile d'étudier la relation moment-courbure d'une section droite. Cette courbe, représentée à la Figure VI-4, met en évidence les différentes phases que peut traverser une section structurale sous chargement :

1. **Phase élastique** : tant que le moment fléchissant M reste inférieur ou égal au moment élastique M_e ($M \leq M_e$), la réponse de la section est linéaire et réversible, selon la relation $M = EIX$, où EI est la rigidité et X la courbure $M \leq M_e$;
2. **Phase élasto-plastique** : lorsque M dépasse M_e mais reste inférieur ou égal au moment plastique M_p ($M_e \leq M \leq M_p$), la section entre dans une zone de non-linéarité modérée avec apparition de déformations irréversibles ;
3. **Phase plastique** : lorsque $M = M_p$, une rotule plastique se forme. La section peut subir de grandes déformations sans augmentation de moment ;
4. **Phase de rupture** : au-delà de cette limite, l'excès de déformation entraîne une perte de capacité portante, marquant l'état de ruine.

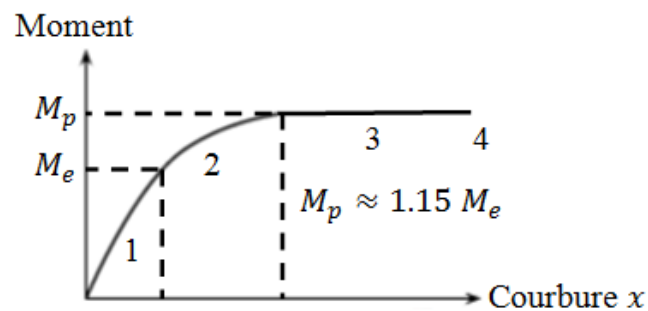


Figure VI-4. Courbe moment-courbure d'une section droite.

La Figure VI-5 illustre le comportement global d'une structure soumise à un effort latéral croissant jusqu'à l'écoulement plastique généralisé, aboutissant à une rigidité nulle. Ce comportement est représenté par une courbe d'effort tranchant à la base en fonction du déplacement du sommet.

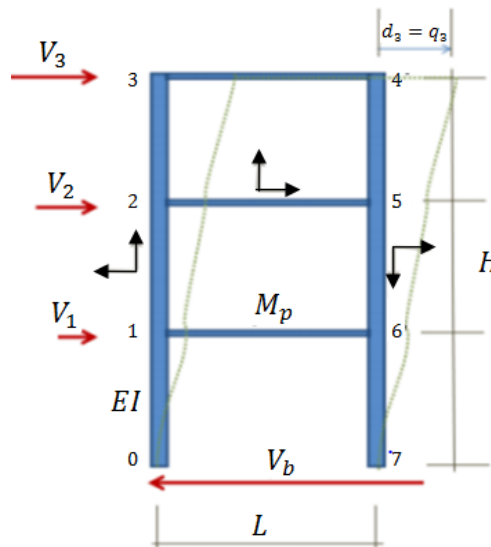


Figure VI-5. L'effort tranchant à la base.

La Figure VI-6 montre une courbe de Pushover typique obtenue par analyse incrémentale, permettant de détecter la formation progressive des rotules plastiques et l'évolution de la rigidité globale jusqu'à l'effondrement. Cette étape peut être réalisée à l'aide d'une méthode de déplacement pas-à-pas, notamment via des logiciels spécialisés.

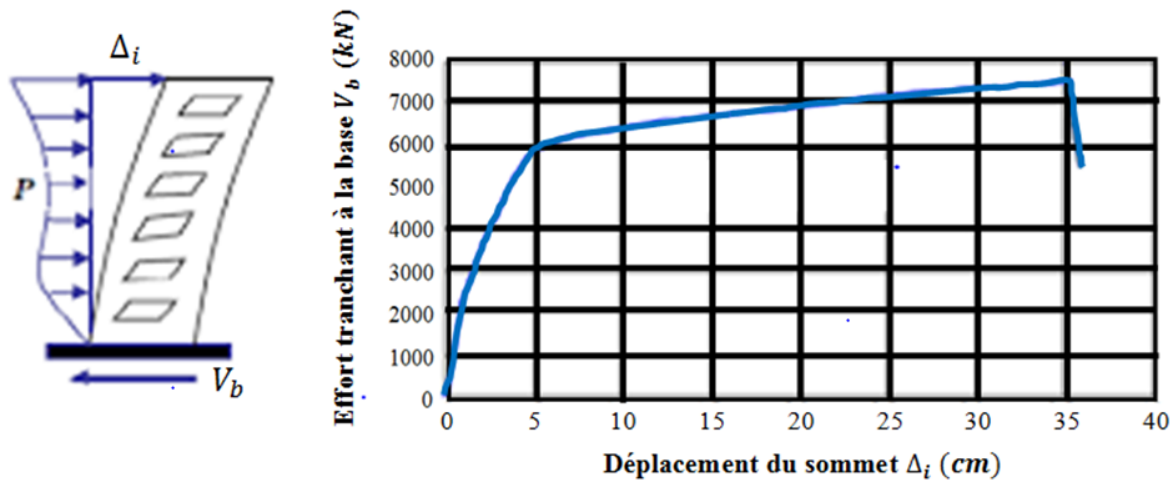


Figure VI-6. Courbe de Pushover d'une structure donnée.

Remarque :

Pour détecter la formation de rotules plastiques et le fléchissement progressif de la rigidité globale jusqu'à l'état de ruine (rigidité nulle) en appliquant l'analyse pas à pas par la méthode de déplacement (en utilisant un logiciel).

VI.7 Point de performance

Le point de performance est défini comme le point d'intersection entre la **courbe de capacité** (représentant la résistance structurelle en termes d'accélération-déplacement) et le **spectre de réponse élastique** (représentant la sollicitation sismique). Il constitue une estimation réaliste de la réponse maximale attendue de la structure lors d'un séisme donné.

À partir de ce point, on peut déterminer le **déplacement de contrôle maximal**, généralement mesuré au dernier plancher (toit), ainsi que le **degré d'endommagement** de la structure. L'analyse de ce point permet de juger du **niveau de pénétration dans le domaine plastique**, et donc de la capacité de la structure à dissiper l'énergie sismique sans effondrement brutal.

La Figure VI-7 illustre ce concept en superposant la courbe de capacité transformée et le spectre de réponse, mettant ainsi en évidence le point de fonctionnement effectif de la structure.

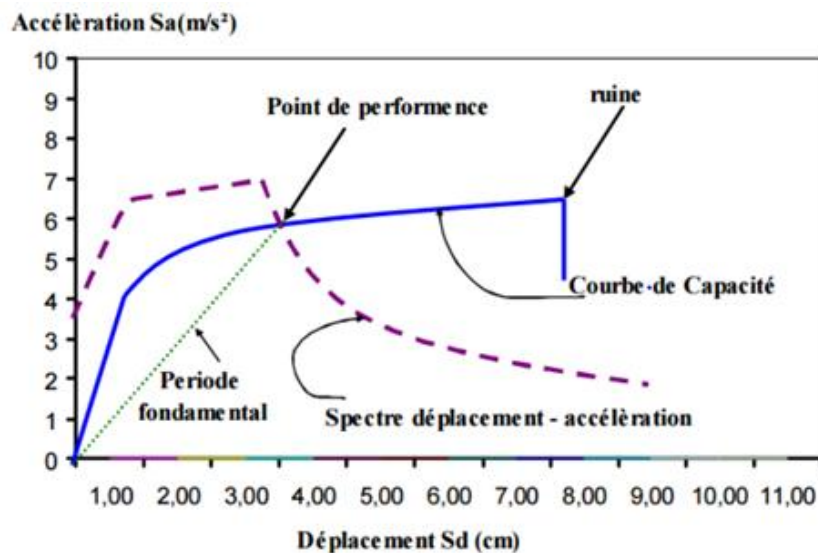


Figure VI-7. Détermination du point de performance.

VI.8 Conclusion

L'analyse statique non linéaire, ou méthode de la poussée progressive, constitue un outil essentiel pour évaluer le comportement inélastique des structures soumises à des sollicitations sismiques. Contrairement à l'analyse linéaire classique, elle permet d'identifier les zones critiques, les mécanismes de formation des rotules plastiques et le mode de défaillance global.

Cette méthode repose sur la transformation du comportement réel d'une structure à plusieurs degrés de liberté en un système équivalent à un seul degré de liberté, facilitant ainsi la comparaison avec le spectre de réponse sismique. L'interprétation de la courbe de capacité et la détermination du point de performance offrent des indications précieuses sur la résistance, la rigidité résiduelle et la ductilité de l'ouvrage.

En intégrant les lois de comportement non linéaires des matériaux et les effets géométriques, l'analyse Pushover permet d'anticiper les déformations maximales attendues. Elle constitue donc une approche complémentaire indispensable pour la vérification de la sécurité sismique des structures existantes ou en phase de conception.

Conclusion générale

La compréhension du comportement dynamique des structures est aujourd'hui une nécessité incontournable dans le domaine du génie civil. Face aux actions vibratoires induites par les séismes, le vent, les équipements industriels ou les explosions accidentelles, la conception des structures ne peut plus se limiter à des analyses statiques traditionnelles. Le présent cours a permis de poser les fondements de la dynamique des structures, en insistant sur les phénomènes vibratoires, les équations du mouvement et les caractéristiques dynamiques essentielles comme la période propre, l'amortissement, et la forme des modes propres.

L'étude des systèmes à un degré de liberté (SDDL) a introduit les mécanismes fondamentaux du mouvement vibratoire, notamment la réponse à des excitations libres ou forcées. Cette base a été progressivement enrichie avec les systèmes à plusieurs degrés de liberté (SPDDL), permettant une approche plus réaliste du comportement des structures complexes. L'analyse modale, la combinaison spectrale, ainsi que les approches de superposition ont été exposées avec rigueur, afin d'outiller l'étudiant à interpréter les réponses dynamiques dans des contextes variés, conformément aux normes de conception parasismique.

Dans une logique d'application, une attention particulière a été portée aux méthodes de calcul sismique réglementaires telles que la méthode statique équivalente et la méthode modale spectrale, largement utilisées dans le dimensionnement parasismique des structures selon les prescriptions du RPA99 V2003. L'introduction à l'analyse non linéaire par la méthode de la poussée progressive (Pushover) vient compléter cet apprentissage, en offrant une vision plus réaliste du comportement post-élastique des bâtiments. Elle permet d'évaluer la performance structurelle au-delà de la simple résistance, en intégrant les notions de ductilité, de redistribution et de mécanismes de ruine progressive.

En définitive, ce polycopié constitue une référence académique structurée, synthétique et accessible, destinée à former des ingénieurs compétents, capables d'appréhender les phénomènes dynamiques avec méthode et esprit critique. Il prépare les étudiants à concevoir des structures sûres et performantes, et à répondre aux exigences techniques et normatives imposées par les risques sismiques. L'approche adoptée dans ce cours jette également les bases d'une formation continue en dynamique avancée, interaction sol-structure, ou simulation numérique, ouvrant la voie à une pratique professionnelle responsable et innovante dans le domaine de l'ingénierie des structures.

Bibliographie

1. Clough, R. W. and Penzien, J. (2003). Structural dynamics, University Ave. Berkeley, CA 94704 USA.
2. Dazio, A. (2013). Fundamentals of structural dynamics. An-Najah National University.
3. Mario, P., & Young, H. K. (2019). Structural dynamics—Theory and computations.
4. Pecker, A. (2006). Dynamique des structures et des ouvrages, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
5. Chopra, A. K. (2012). Dynamics of structures : Theory and Applications to Earthquake Engineering Fourth Edition, Library of Congress Cataloging-in-Publication Data on File, Prentice Hall.
6. Pecker, A. (2011). Dynamique des structures et des ouvrages. Ecole des Ponts-ParisTech.
7. Humar, J. (2012). Dynamics of structures (3rd ed.). CRC press.
8. Dazio, A. (2013). Fundamentals of Structural Dynamics. An-Najah National University.
9. Chopra, A. K. (2017). Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering. Pearson.
10. RPA-99, 2003. Règles parasismiques Algériennes 1999. Document technique réglementaire.
11. Pecker, A. (2023). Dynamique des structures et des ouvrages. Presses de l'Ecole nationale des ponts et chaussées.
12. Chopra, A. K., & Goel, R. K. (2001). A modal pushover analysis procedure to estimate seismic demands for buildings: theory and preliminary evaluation. PEER 2001/03.