Chapitre II : Holomorphie, intégrale curviligne d'une fonction complexe

II.1. Introduction

Dans un ensemble des nombres complexes, on appelle une fonction $f(z)$ de variable complexe, définie comme suit

$$f(z) = f(x,y) = p(x,y) + i\,q(x,y)$$

Telles que : $p(x,y) et\ q(x,y)$ sont la partie réelle et la partie imaginaire de f, respectivement

II.2. Qu'est qu'une fonction holomorphe

Une fonction complexe est dite holomorphe si elle est dérivable au sens complexe

II.2.1. Holomorphie d'une fonction en un point Z_0

On dit que la fonction complexe $f(z)$ est holomorphe en z_0, si et seulement si elle est différentielle en z_0 , on a :

$$\frac{df}{dz}(z_0) = f^{'}(z_0) = \lim_{z \to z_0}\left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right]$$

II.2.2. Holomorphie d'une fonction sur un domaine D « conditions de Cauchy »

D'après le théorème de Cauchy, une fonction complexe $f(z)$ est holomorphe sur un domaine D, si et seulement si :

- $f(z)$ est défini et continue sur D
- $p(x,y)$ et $q(x,y)$ sont continues et définies sur D
- $\frac{\partial p(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial q(x,y)}{\partial y}$ et $\frac{\partial p(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial q(x,y)}{\partial x}$

- **Exemple**

Soit $f(z)$ une fonction complexe, telle que :

$$f(z) = 2z^2 - 5z + 1$$

1- La fonction $f$est-elle holomorphe en $z_0 = 5i$?
2- Etudier l'holomorphie de f sur $\mathbb{C}$

Réponse :

1. Calculons la limite

$$\lim_{z\to 5i}\left[\frac{f(z)-f(5i)}{z-5i}\right]=\lim_{z\to 5i}\left[\frac{2z^2-5z+1-(-50-25i+1)}{z-5i}\right]$$

$$\lim_{z\to 5i}\left[\frac{2z^2-5z+50+25i}{z-5i}\right]=\lim_{z\to 5i}[2z+10i-5]=(20i-5)$$

f Est dérivable au sens complexe telle que $f^{'}(z_0)=20i-5$, donc elle est holomorphe en z_0

2. Appliquons le théorème de Cauchy

- Expression de la fonction f sous la forme :

$$f(z)=\ f(x,y)=p(x,y)+i\,q(x,y)$$

Il suffit de remplacer z par $(x+iy)$, on obtient alors :

$$f(x,y)=2(x+iy)^2-5(x+iy)+1$$

$$f(x,y)=(2x^2-2y^2-5x+1)+i(4xy-5y)$$
$$p(x,y)=2x^2-2y^2-5x+1 \qquad ; \qquad q(x,y)=4xy-5y$$

- $p(x,y)$ et $q(x,y)$ sont continues et définies sur $\mathbb{C}$ (polynomiale)
- $\frac{\partial p(x,y)}{\partial x}=4x-5$ et $\frac{\partial q(x,y)}{\partial y}=4x-5$
- $\frac{\partial p(x,y)}{\partial y}=-\,4y$ et $\frac{\partial q(x,y)}{\partial x}=4y$

Toutes les conditions de Cauchy sont vérifiées, alors cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C}$

II.2. Intégrale curviligne d'une fonction complexe

Soit f une fonction complexe, et (C) une courbe continue se trouve dans un plan complexe (OXY). L'intégrale curviligne de la fonction f sur le long de la courbe (C) orienté dans le sens positif est définie comme étant la somme des intégrales sur le long des différents tronçons (C_k) de cette courbe. Elle exprimée comme suit :

$$\int_{(C)} f(z)=\int_{(C1)} f(z)+\int_{(C2)} f(z)+\int_{(C3)} f(z)+\ldots\ldots\int_{(Cn)} f(z)$$

Pour calculer cette intégrale il suffit de :

- Remplacer z par $x + iy$
- Déterminer l'équation de la courbe c'est-à-dire de trouver une relation entre x et y
- Choisir l'une des deux variables x ou y ou calculer l'intégrale simple d'une seule variable choisie

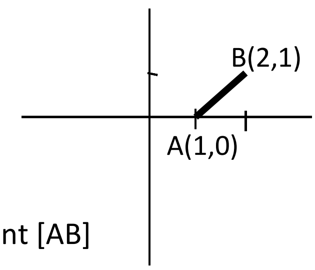
II.3.1. Méthodes de calcul des intégrales curvilignes

a. Calcul par minimisation des variables complexes

Dans cette méthode l'une des deux variables x ou y sera éliminée, cette élimination est basée sur la relation graphique entre x et y. pour cela une représentation graphique du chemin doit être réalisée.

Exemple :

Calculer l'intégrale curviligne suivante :



$\int_1^{2+i} i\, Re(z)\, Im(z)\, dz$

$$z = x + iy \;\;;\;\; Re(z) = x \;;\;\; Im(z) = y$$

D'après la représentation, cette intégrale a suivi le chemin du segment [AB]

La relation graphique entre les variables x et y sur le long du chemin [AB] sera donc :

$y = x - 1$........ L'équation de la droite (AB)

La variable à éliminer dans ce cas est (y).

La variable complexe z est exprimé comme suit

$$z = x + i(x-1) \;\;\rightarrow\;\; dz = (1+i)dx$$

La partie imaginaire s'écrit : $Im(z) = y = x - 1$

Les bornes de l'intégrale seront donc :

$$\begin{cases} z = 1 \;\;\rightarrow\;\; x + i(x-1) = 1 \;\;\rightarrow\;\; x = 1 \\ z = 2 + i \;\;\rightarrow\;\; x + i(x-1) = 2 + i \;\;\rightarrow\;\; x = 2 \end{cases}$$

$$\int_1^{2+i} i\,Re(z)\,Im(z)\,dz \;=\; \int_1^2 i\,x\,(x-1)(1+i)\,dx = \int_1^2 (i-1)\,(x^2-x)dx$$

$$= (i-1)\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{5}{6}(i-1)$$

b. Calcul par changement de variable complexe

Cette méthode est basé sur un passage de la forme algébrique de la fonction à intégrée $f(z)$ vers la forme géométrique $f(r,\theta)$, ce passage appelé changement de variable polaire.

Avec :

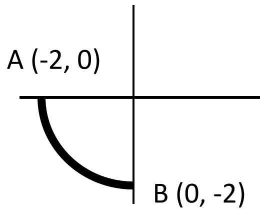
$$z = x+iy = r\,[\cos(\theta)+isin(\theta)] \quad ; \quad x = r\,cos(\theta) \;;\; y = r\sin(\theta) \;;$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \qquad et \quad \theta = \arg(z)$$

Exemple

Calculer l'intégrale curviligne suivante, dans laquelle le chemin C est un le quart du cercle AB

$\int_{-2}^{-2i} i\,Re(z)\,dz$



$$z = r\,[\cos(\theta)+isin(\theta)] \quad\rightarrow\quad dz = r\left[-\sin(\theta)+icos(\theta)\right]d\theta$$

$$r = 2 = cst \qquad et \qquad \pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$$

$$Re(z) = r\,cos(\theta) = 2\,cos(\theta)$$

$$\int_{-2}^{-2i} i\,Re(z)\,dz = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} 4i\;\cos(\theta)\,[-\sin(\theta)+icos(\theta)]d\theta$$

$$4i\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} [-\;\cos(\theta)\sin(\theta)+i\,cos^2(\theta)]d\theta$$

$$= 4i\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} [-\frac{1}{2}\sin(2\theta)+\frac{i}{2}\cos(2\theta)+\frac{i}{2}]d\theta$$

$$4i\left[\frac{1}{4}\cos(2\theta)+\frac{i}{4}\sin(2\theta)+\frac{i\theta}{2}\right]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} = -\pi-2i$$

c. Calcul par décomposition

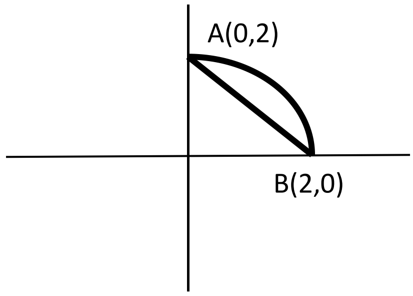
Cette méthode est basée sur la décomposition d'un chemin fermé (C) orienté au sens positif aux plusieurs sous chemins (C1), (C2) …… (Cn), dans lesquels la continuité est une condition préalable dans ce cas.

$$\int_{(C)} f(z)dz = \int_{(C1)} f(z)dz + \int_{(C2)} f(z)dz + \dots \int_{(Cn)} f(z)dz$$

Exemple :

Calculer l'intégrale curviligne suivante

$\int_{[ABA]} Re(z)dz$



$$\int_{[ABA]} Re(z)dz = \int_{[AB]} Re(z)dz + \int_{[BA]} Re(z)dz$$

$$\int_{[AB]} Re(z)dz = \int_0^2 x\,(1-i)dx = (1-i)\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2-2i$$

$$\int_{[BA]} Re(z)dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos(\theta)\,[-\sin(\theta)+i\cos(\theta)]d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-2\sin(2\theta)+2\cos(2\theta)+2]d\theta = [\cos(2\theta)+\sin(2\theta)+2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-2+\pi$$

$$\int_{[ABA]} Re(z)dz = 2-2i-2+\pi = \pi-2i$$

II.3.2. Formules intégrales curvilignes de Cauchy « Théorème de Cauchy-Riemann»

Soit f(z) une fonction complexe holomorphe exprimée comme suit :

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+1}} (n \geq 0)$$

Cauchy-Riemann ont proposés une formule d'intégrale curviligne sur un domaine (C), dépend de la localisation de Z_0 par rapport à (C).

- Si z_0 est situé à l'intérieur de (C) l'intégrale s'écrit sous la forme suivante:

$$\int_{(C)} f(z)dz = \int_{(C)} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} g^n(z_0)$$

- Si Z_0 est situé à l'extérieur de (C), dans ce cas l'intégrale est nulle

Exemple:

Calculer l'intégrale curviligne de la fonction complexe f(z) sur le domaine (C) tels que:

$f(z) = \frac{4z+3}{(z-2i)^2}$ et le domaine (C) est un cercle de centre O, de rayon 3

Solution:

- le point fixe de la fonction *f* est : Z_0=2i ; ce point graphiquement représente le point $M_0(0,2)$

Ce point est situé à l'interieur du domaine (C) donc cette intégrale devient:

$$\int_{(C)} f(z)dz = \frac{2\pi i}{1!} * g'(z_0) = 8\pi i$$

$$g(z) = 4z + 3 \quad \Rightarrow \quad g'(z) = 4 \ \Rightarrow \quad g'(z_0) = 4 \ \text{(n+1=2)}$$

Propriété:

- Si la fonction f(z) est exprimée sous la forme:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)}$$

Dans ce cas, cette fonction doit être décomposée en trois parties, comme suit:

$$f(z) = \frac{g_1(z)}{z - z_0} + \frac{g_2(z)}{z - z_1} + \frac{g_3(z)}{z - z_2}$$

- Trois intégrales seront calculées dans ce cas, pour chaque partie et selon la formule de Cauchy-Riemann précédente

II.4. Exercices

Exercice 1

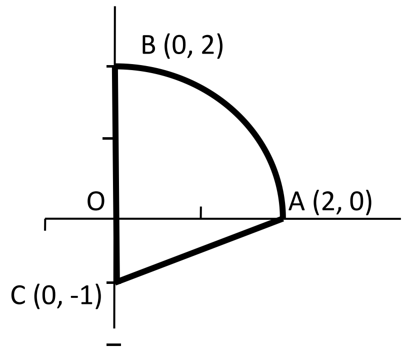
Evaluer l'intégrale $\int_0^{1+i} i\overline{z}\, dz$, suivant la courbe C, telle que :

a) C le chemin orienté dans le sens positif et défini par l'équation $z = it + t^2\,;\; ou\; t \in [0\,,\,+\infty[$
b) C est formé des segments joignant 0 à 2 et 2 à 1+i.
c) C est le segment de droite [OB], O (0, 0) et B (1, 1).

Exercice 2:

Calculer les intégrales curvilignes suivantes

a) $\oint_{(ABCA)} z\, Arg(z) dz$; b) $\oint_{(OABO)} Re(z) * |z|\; dz$; c) $\oint_{(OABO)} z\, Arg(z)\; dz$



Exercice 3 :

Les fonctions suivantes sont-elles holomorphes sur $\mathbb{C}$?

a) $f(z) = iz^2 - 1 + 2i$; b) $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$

Exercice 4

En se servant de la formule intégrale de Cauchy, calculer les intégrales curvilignes suivantes :

a) $\oint_C \frac{z^3-z+1}{z+i-1}\,dz$; où C désigne le cercle de centre O (0, 0) et de rayon R = 5, orienté positivement.

b) $\oint_C \frac{e^z}{z^2+2}\,dz$; où C désigne le carré de sommets $(1-i); (1+i); (i) et\ (-i)$ orienté positivement

c) $\oint_C \frac{\sin z}{z^3+z}\,dz$; où C désigne le cercle de centre O (0, 0) et de rayon R = 2, orienté positivement

d) $\oint_C \frac{z-1}{(z+1)^2\,(z-i)^2}\,dz$; où C désigne le cercle de centre O (0, 0) et de rayon R = 2, orienté positivement