Chapitre I : Rappels sur les nombres complexes

Introduction

Les nombres complexes, comme beaucoup d'autres idées en mathématique, ont d'importantes d'applications en sciences et peuvent être utilisés pour résoudre des problèmes du monde réel.

I.1. Généralités sur les nombres complexes

L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$, car pour tout nombre réel x, le carré x^2 est toujours positif, et donc $x^2 + 1$ ne peut jamais être inférieur à 1.

Néanmoins, il s'avère très utile de supposer qu'il existe un nombre i pour lequel :

$$i^2 =- 1$$

i: S'appelle « **L'unité imaginaire** »

I.1.1. Qu'est ce qu'un nombre complexe

Un nombre complexe est un nombre quelconque de la forme $z = x + iy$

Où : x et y sont des nombres réels et i est l'unité imaginaire

x: La partie réelle de z et noté $Re(z)$; y: la partie imaginaire de z et noté $Im(z)$

Attention

Une erreur courante est de dire que $Im(z) = iy$. Le "i" ne devrait pas être là.

Exemple

Soit z un nombre complexe tel que $z = 5 - 2i$, donc $Re(z) = 5$ Et $Im(z) =- 2$

Propriétés

- Un nombre complexe z est dit « réel pur » si : $Im(z) = 0$
- Un nombre complexe z est dit « imaginaire pur » si : $Re(z) = 0$
- Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, tels que :

$z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, z_1 et z_2 sont égaux si :

$$Re(z_1) = Re(z_2) \implies x_1 = x_2$$

Et

$$Im(z_1) = Im(z_2) \implies y_1 = y_2$$

I.1.2. Conjugué d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe, le nombre obtenu en changement le signe de sa partie imaginaire s'appelle conjugué de z ; est désigné par le symbole $\overline{z}$, tel que :

$$Re(z) = Re(\overline{z}) \quad \text{et} \quad Im(z) = -Im(\overline{z})$$

Exemple $z = 6 - 5i \implies \overline{z} = 6 + 5i$

Propriétés

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$; $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$; $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

$z + \overline{z} = 2Re(z)$; $z - \overline{z} = 2i\,.Im(z)$

I.1.3. Plan complexe

En raison de la correspondance entre un nombre complexe z et un seul point $M(x, y)$, dans un plan de coordonnées, nous utiliserons les termes nombre complexe et point de manière interchangeable

Le plan complexe (fig. I.1) est noté z-Plan

- L'axe horizontal est appelé : **axe réel**

- L'axe vertical est appelé : **axe imaginaire**

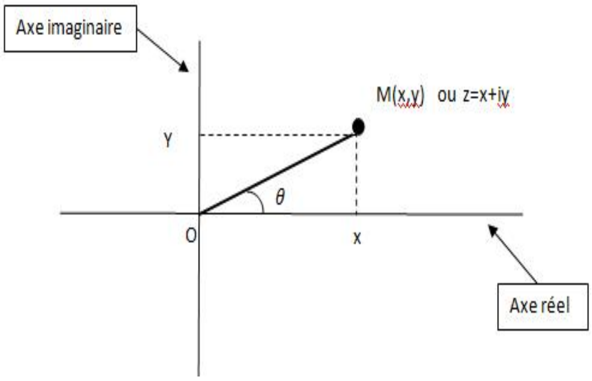

Figure I.1 : Plan complexe

I.1.4. Opérations sur les nombres complexes

Vous pouvez ajouter, multiplier ou deviser les nombres complexes entre eux :

- **Soustraire – additionner**

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$; $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

- **Multiplier**

$$z_1 \times z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

- **Deviser**

$$\frac{\boldsymbol{z_1}}{\boldsymbol{z_2}} = \frac{\boldsymbol{z_1} \times \overline{\boldsymbol{z_2}}}{\boldsymbol{z_2} \times \overline{\boldsymbol{z_2}}} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2}{\boldsymbol{x_2}^2 + \boldsymbol{y_2}^2}$$

I.1.5. Module et l'argument d'un nombre complexe

Pour tout nombre complexe donné z, on définit le module de z par :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Dans le plan complexe (Fig I.1), ce module représente la longueur de segment OM

- L'angle θ formé entre le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et l'axe réel s'appelle « l'argument de z » est définit par :

$$arg(z) = \theta \text{ Où : } \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{|z|} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{|z|} \end{cases}$$

- **Propriétés**

$$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| \ ; \ arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

$$|z| = |\overline{z}| \quad ; \ \arg(z) =- \arg(\overline{z})$$

- **Attention**

$$|z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2| \ \text{ et } \ |z_1 - z_2| \neq |z_1| - |z_2|$$

I.1.6. Différentes formes d'un nombre complexe

Un nombre complexe peut s'écrire en trois formes

- **Forme algébrique** : $z = x + iy$

- **Forme Exponentielle** : $z = |z| \, e^{i\theta}$

- **Forme triangulaire** : $z = |z| * [\cos(\theta) + i \, sin(\theta)]$

- Propriétés

Pour tous nombres complexes z ; et nombres entiers n, on obtient :

$$\begin{cases} \arg(z^n) = n * \arg(z) = n\theta \\ |z^n| = |z|^n \end{cases}$$

D'après la forme triangulaire citée précédemment :

$$z^n = |z|^n * [cos(n\theta) + i\, sin(n\theta)]$$

Cette dernière formule appelée « la formule de Moivre »

I.2. Résoudre des équations d'une variable complexe

I.2.1. Equation d'ordre 2

La formule quadratique bien connue a montré que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions données par :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{Où} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

Les solutions x_1 et x_2 sont réelles pour $\Delta > 0$, et elles sont complexes pour $\Delta < 0$, vu que le paramètre Δ est sous la racine donc il suffit de remplacer le signe (-) par (i^2)

L'expression des solutions complexes sera donc :

$$x_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

-Exemple

Résoudre l'équation suivante : $x^2 + 2x + 5 = 0$

On a : $a = 1$; $b = 2$ et $c = 5$ on obtient alors $\Delta = -16 = 16i^2$

Donc cette équation a deux solutions complexes à savoir

$$x_1 = \frac{-2-i\sqrt{16}}{2} = -1 - 2i \quad \text{Et} \quad x_2 = \frac{-2+i\sqrt{16}}{2} = -1 + 2i$$

I.2.2. Racines d'un nombre complexe

Pour tous nombres complexes z, et nombres entiers n, les solutions complexes de l'équation : $z^n = w$, tel que : w est un nombre complexe définit comme suit :

$$\begin{cases} |w| = r \\ \arg(w) = \theta + 2k\pi \quad ; k\epsilon\mathbb{Z} \end{cases}$$

L'expression de w en forme exponentielle sera : $w = r * e^{i(\theta+2k\pi)}$

Les solutions de l''équation précédente seront exprimées alors comme suit :

$$z_k = \sqrt[n]{r} * e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$$

- Exemple

Trouver la racine 6ième de $w = 1$

Nous devrons donc résoudre l'équation $z^6 = 1$,

On a : $w = 1 \ donc \begin{cases} |w| = 1 \\ \arg(w) = 0 + 2k\pi \end{cases}$ les solutions de l'équation seront exprimées

$$z_k = \sqrt[6]{1} * e^{i\left(\frac{0+2k\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{k\pi}{3}\right)}$$

- Pour $k = 0 \rightarrow z_0 = e^{i(0)} = 1$
- Pour $k = 1 \rightarrow z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- Pour $k = 2 \rightarrow z_2 = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- Pour $k = -1 \rightarrow z_{-1} = e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- Pour $k = -2 \rightarrow z_{-2} = e^{i\left(\frac{-2\pi}{3}\right)} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- Pour $k = 3 \rightarrow z_3 = e^{i(\pi)} = -1$

Cette équation a 6 solutions à savoir :

$$\left\{1 \ ; \ -1 \ ; \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \ \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \ \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\}$$

I.3. Ensemble des points dans un plan complexe

I.3.1. Quelque notion des ensembles

- Ensemble ouvert

(E) est dit ensemble ouvert s'il contient tous les points de son intérieur mais ne contient pas les points de ses extrémités

- Ensemble fermé

(E) est dit ensemble fermé s'il contient tous les points de son intérieur et de ses extrémités

- Ensemble borné

(E) est dit ensemble borné si l'on peut trouver une constante R telle que

$|z| < R$ Pour tout point $M(x, y) \in (E)$

- Ensemble connexe

(E) est dit ensemble connexe si deux points quelconques de (E) peuvent être joints par un chemin formé de segments de droites dont tous les points de ce segments appartiennent à (E)

- Ensemble compact

(E) est dit ensemble compact s'il est à la fois fermé et borné

1.3.2. Disque ouvert – Disque fermé

- On appelle un disque ouvert de centre $A(X_0, Y_0)$ et de rayon R, noté $D(A; R)$; l'ensemble des points M de plan (OXY) tel que :

$\{M(x, y) \in (Oxy)\,;\, AM < R\}$ On obtient donc : $(x - X_0)^2 + (y - Y_0)^2 < R^2$

- On appelle un disque fermé de centre $B(X_0, Y_0)$ et de rayon R, noté $D(B; R)$; l'ensemble des points M de plan (OXY) tel que :

$\{M(x, y) \in (Oxy)\,;\, BM \leq R\}$ On obtient donc : $(x - X_0)^2 + (y - Y_0)^2 \leq R^2$

I.3.3. Cercle

- On appelle un cercle de centre $A(X_0, Y_0)$ et de rayon R, noté $C(A; R)$; l'ensemble des points M de plan (OXY) tel que :

$\{M(x, y) \in (Oxy)\,; AM = R\}$ On obtient donc : $(x - X_0)^2 + (y - Y_0)^2 = R^2$

I.3.4. Segment de droite

Considérons les deux points $A(X_0, Y_0)$ et $B(X_1, Y_1)$, le segment $[AB]$ est définit comme suit :

$\left\{M(x, y) \in (Oxy)\,; \overrightarrow{AM} = \alpha\,\overrightarrow{BM}\ , tel\ que: 0 \leq \alpha \leq 1\right\}$

I.5. Exercices

Exercice 1 :

Soient Z_1 et Z_2 deux nombres complexes, tels que : $Z_1 = 2 - i$ et $Z_2 = 1 + 3i$

Ecrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique :

a) $\frac{Z_1}{Z_2}$; b) $\frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$; c) $\frac{\overline{Z_1 Z_2}}{\overline{Z_1} - \overline{Z_2}}$

Exercice 2

Trouver le module et l'argument principal des nombres complexes suivants :

a) $Z = 4 + 3i$; b) $Z = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\,sin(\frac{\pi}{5})$; c) $Z = \cos(\theta) - i\,sin(\theta)$ $(\pi < \theta < \frac{3\pi}{2})$

Exercice 3

Représenter les ensembles des points suivant dans le plan complexe

a) $\{Z \epsilon\, \mathbb{C}\ ;\ |Z - 3i| \leq |Z - 3|\}$; b) $\{Z \epsilon\, \mathbb{C}\ ;\ |Z - i| < 3\}$

c) $\{Z \epsilon\, \mathbb{C}\ ;\ |Z - i| > 3\}$; d) $\left\{Z \epsilon\, \mathbb{C}\ ;\ Re(Z) - \ln(Z) < 1\right\}$

Exercice 4:

Parmi les ensembles suivants, trouver ceux qui sont : Connexes, Bornés et Compacts

a) $\{Z \epsilon\, \mathbb{C}\ ;\ \ln(Z) > 0\}$; b) $\{Z \epsilon\, \mathbb{C}\ ;\ |Z - i| \geq 3\}$; c) $\{1,\ i\,,\ -2\,,\ 1 + 3i\,\}$

d) $\{Z \epsilon\, \mathbb{C}\ ;\ |Z| < 1\} \cup \{Z \epsilon\, \mathbb{C}\ ;\ |Z - 1| < 1\}$; e) $\mathbb{C}$

Exercice 5:

Résoudre les équations suivantes :

a) $Z^3 - 3Z^2 - z + 3 = 0$; b) $(Z - 1)^4 = 1$

Exercice 6 :

Donner les nombres complexes suivants sous la forme algébrique :

a) $(1+i)^{1000}$; b) $\left(\sqrt{3}-i\right)^{3}\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{-5}$

Exercice 7 :

Calculer $i^{\frac{1}{6}}$ et représenter les résultats dans le plan complexe

Exercice 8 :

Calculer les sommes suivantes :

a) $\sin(x)+\sin(2x)+\ldots+\sin(nx)$; b) $\cos(x)+\cos(2x)+\ldots+\cos(nx)$