السلسلة 2

الحل النموذجي

التمرين 1:

$\bar{X}=67,45$; $n=100$

$N=1546$, $s=2,93$

حساب النسبة $\frac{n}{N}=\frac{100}{1546}=0,06$

$\frac{n}{N}>0,05$

فنعتبر السحب بدون إرجاع

وبما أن $n>30$ فإن:

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \to N(0;1)$$

لدينا من الجدول:

$Z_{1-\alpha}=Z_{0,95}=1,96$

$\hat{S}^2=\frac{n}{n-1}\cdot s^2$

ومنه $\hat{S}=\sqrt{\hat{S}^2}$

$$\bar{X}-1,96\cdot\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}<\mu\leq\bar{X}+1,96\cdot\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

$$\mu\in\left[\bar{X}-1,96\cdot\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{\frac{N-n}{N-1}};\ \bar{X}+1,96\cdot\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right]$$

نتم التطبيق العددي

التمرين 2:

$s=180$; $\bar{x}=960$; $n=100$;

$N=50.000$

1. مجال الثقة 95%: $1-\alpha=95\%$

حساب النسبة: $\frac{n}{N}=\frac{100}{50.000}=0,002<0,05$

فنعتبر السحب بإرجاع

لما أن $n>30$ فإن

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\hat{S}/\sqrt{n}} \to N(0;1) \qquad \hat{S}=\sqrt{\frac{n}{n-1}\cdot s^2}$$

$$\mu\in\left[\bar{X}-1,96\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}};\ \bar{X}+1,96\cdot\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\right]$$

مع التطبيق العددي

2. مجال الثقة 99%: $1-\alpha=99\%$

$Z_{1-\alpha}=2,58$

$$\mu\in\left[\bar{X}-2,58\cdot\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}};\ \bar{X}+2,58\cdot\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\right]$$

مع التطبيق العددي

3. $n = 100$ ، $N = 49\,900$

نفس الأسئلة.

المقارنة تكون باستخراج العلاقة بين حجم المجتمع وتغيير $Z_{1-\alpha}$ وتأثيره بطول مجال الثقة

التمرين 03:

$\bar{X} = 47,53$; $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 15425,09$

① معالم التوزيع:

أحسن مقدر لـ μ هو $\bar{X}$

أحسن مقدر لـ σ هو $\hat{S}$

$$\hat{S}^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

$$\hat{S} = \sqrt{\hat{S}^2}$$

② نفرض أن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي $N(\mu ; (20,56)^2)$

حدد مجال الثقة بـ 95% للمتوسط μ:

$$\mu \in \left[\bar{x} - 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

③ نفس السؤال من أجل $1-\alpha = 99\%$

نفرض أن $X \sim N(\mu ; \sigma)$

حيث μ و σ مجهولين.

وخصائص العينة هي:

$n = 20$; $\bar{x} = 47,68$; $S = 6,34$

بما أن σ مجهول نستخدم تقديره النقطي $\hat{S}$

وبالتالي:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\hat{S}/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

$$\mu \in \left[\bar{x} - t_{0,975} \cdot \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + t_{0,975} \cdot \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\right]$$

$$t_{0,975} = 2,09$$

التمرين 04:

$\mu = 55$; $\sigma = 10$

نفترض أن المجتمع موزع طبيعيا

$$\Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu ; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$P\left(\sum x_i > 1500\right) =$$

$$P\left(\frac{\sum x_i}{n} > \frac{1500}{n}\right) = P(\bar{x} > 60)$$

$$= 1 - P\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{60 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$