

نلخص النتائج السابقة في الجدول التالي:

العزم الكلي:

$$I_G = tr(\Sigma) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 30.75$$

نسبة تمثيل المستوى	المساهمة النسبية $cr(\Delta_k/I_G) = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p}$	المساهمة المطلقة $ca(\Delta_k/I_G) = \lambda_k$	
79.56%	79.56%	24.464	المحور الأول
94.04%	14.54%	4.47	المحور الثاني
99.88%	5.78%	1.778	المحور الثالث
100%	1.23%	0.038	المحور الرابع

اختيار المحور الأول والثاني يعطي نسبة تمثيل جد جيدة وتقدر بـ 94.04%

8- تمثيل الأفراد في المحاور الجديدة:

من أجل تمثيل الأفراد المستوي المعرفة بالمحاور الجديدة نقوم بحساب إحداثيات الأفراد في المحاور الجديدة حيث يمثل y_{ik} إحداثيات الوحدة u_i في المحور Δ_k ، نسقط عموديا الشعاع $\vec{Gu_i}$ على هذا المحور فنحصل:

$$y_{ik} = \langle \vec{Gu_i}, \vec{a_k} \rangle = a_k^t U_{ci}$$

$$Y_i = A^t U_{ci}$$

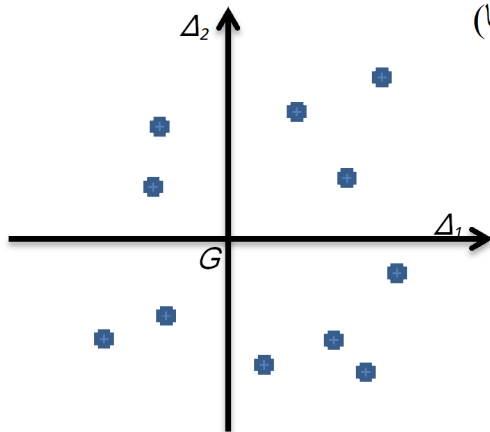
حيث يمثل Y_i شعاع إحداثيات الوحدة u_i و A مصفوفة تغيير الأساس (مصفوفة الأشعة الذاتية المتعامدة والتي طاولتها تساوي 1 ومعكوسها يساوي منقولها)

ملاحظة:

اختيار بين المحاور ليس لديه أثر على التحليل

(اختيار في محور الترتيب أو الفواصل لا يهم).

مثال: إحداثيات الوحدة u_4 (خديجة)



$$Y_4 = A^t u_{c4} = u_{c4} = \begin{bmatrix} 1.83 \\ 2.33 \\ -1.83 \\ -2.5 \end{bmatrix}$$

8-1- نوعية تمثيل الأفراد:

عندما تكون نقاط إسقاط الأفراد متباعدة على محور أو مستوي نستطيع التأكيد أن النقاط التي تمثل هؤلاء الأفراد تكون أيضا متباعدة في الفضاء في المقابل إسقاط فردين يكونان متقاربين على محور أو مستوي ليعني أن الفردين متقاربين في الفضاء.

من أجل التفسير الصحيح لتقارب إسقاط فردين على محور أو مستوي يجب التأكد بأن هؤلاء الأفراد ممثلون بشكل جيد في المحور أو المستوى.

لكي يكون الفرد u_i ممثلا بشكل جيد في محور (أو مستوي أو فضاء شعاعي جزئي) يجب أن تكون الزاوية بين $\overrightarrow{Gu_i}$ والمحور (أو مستوي أو فضاء شعاعي جزئي) صغيرة. نحسب $\cos$ هذه الزاوية أو بالاحرى مربع $\cos$ الزاوية.

باستخدام نظرية بيتاغور (Pythagore) نستطيع إثبات أن مربع $\cos$ لزاوية بين شعاع ومستوي مولد بشعاعين متعامدين يساوي مجموع مربع $\cos$ للزاويات التي يشكلها هذا الشعاع مع كل شعاع على حدا من الشعاعين اللذان يولدان المستوي.

تعمم هذه الخاصية على زاوية بين شعاع وفضاء شعاعي جزئي ذو بعد k . إذا كان مربع $\cos$ بين $\overrightarrow{Gu_i}$ ومحور (أو مستوي أو فضاء شعاعي جزئي) قريب من الواحد نستطيع القول أن الفرد u_i ممثلا بشكل جيد بإسقاطه على المحور (أو مستوي أو فضاء شعاعي جزئي)، أيضا فردين ممثلين جيدا في الإسقاط على محور (أو مستوي أو فضاء شعاعي جزئي) ولهما إسقاط متقارب نستطيع القول أن الفردين متقاربين في الفضاء.

يعطى مربع $\cos$ للزاوية α_{ik} بين $\overrightarrow{Gu_i}$ والمحور Δ_k ذو شعاع توجيه a_k بالعلاقة:

$$\cos^2(\alpha_{ik}) = \frac{\langle \overrightarrow{Gu_i}, \overrightarrow{a_k} \rangle^2}{\|\overrightarrow{Gu_i}\|^2} = \frac{a_k^t U_{ci}^t U_{ci} a_k}{U_{ci}^t U_{ci}} = \frac{[\sum_{j=1}^p (x_{ij} - x_{.j}) a_{kj}]^2}{\sum_{j=1}^p (x_{ij} - x_{.j})^2}$$

كما أشرنا يمكن حساب مربع $\cos$ للزاوية $\alpha_{ikk'}$ بين الشعاع والمستوي المولد بالمحورين

$$: \Delta_1 \oplus \Delta_2$$

$$\cos^2(\alpha_{ikk'}) = \cos^2(\alpha_{ik}) + \cos^2(\alpha_{ik'})$$

إذا وبعد دراسة النسب المئوية للعزم المفسر بالفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالمحاور الجديدة وقررنا فقط الاحتفاظ بفضاء شعاعي جزئي ذو بعد $d < p$ ، نستطيع حساب نوعية تمثيل الفرد u_i بحساب مربع $\cos$ للزاوية بين $\overrightarrow{Gu_i}$ والفضاء الشعاعي الجزئي.

ملاحظة:

إذا كان أحد الأفراد قريب جدا من مركز الثقل في الفضاء أي إذا $\overrightarrow{Gu_i}$ صغير جدا فإن النقطة التي تمثل هذا الفرد على المحور (أو مستوي أو فضاء شعاعي جزئي) تكون ممثلة جيدا.

2-8- تفسير المحاور الجديدة بدلالة الأفراد:

عندما نقوم بحساب العزم Δ_k^* المحمول بالمحور نستطيع معرفة حصة العزم التي ترجع لفرد معين u_i .

1-2-8- المساهمة المطلقة للفرد في المحور:

$I_{\Delta_k}^*$ يساوي $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d^2(h_{\Delta_{ki}}, G)$ المساهمة المطلقة للفرد u_i في هذا العزم تساوي:

$$ca(u_i/\Delta_k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d^2(h_{\Delta_{ki}}, G)$$

بما أن كل الأفراد لديهم نفس الوزن، تكون مساهمة فرد معين أكبر في صناعة محور معين كلما كان إسقاط هذا الفرد على هذا المحور بعيد عن مركز الثقل في المقابل يكون إسقاط فرد معين قريب من مركز الثقل تكون مساهمته ضعيفة في العزم المحمول بهذا المحور. نستخدم المساهمات من أجل تفسير المحاور الجديدة بدلالة الأفراد.

2-2-8- المساهمة النسبية للفرد في المحور:

يمكن أن نعرف المساهمة النسبية لفرد u_i في العزم المحمول بهذا المحور:

$$cr(u_i/\Delta_k) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d^2(h_{\Delta_{ki}}, G)}{I_{\Delta_k}^*} = \frac{\frac{1}{n} \langle \overrightarrow{Gu_i}, \overrightarrow{Ga_k} \rangle^2}{\lambda_k} = \frac{\frac{1}{n} a_k^t U_{ci}^t U_{ci} a_k}{\lambda_k}$$

فحص هذه المساهمات يسمح بتفسير المحاور الرئيسية مع الأفراد، نستطيع ملاحظة أن $\sum_{i=1}^n cr(u_i/\Delta_k) = 1$

9- تمثيل المتغيرات:

يمكن التطرق إلى مشكل تمثيل المتغيرات بطريقة متناظرة عن طريقة تمثيل الأفراد فالمعالجة تكون في R^n بدلا من R^p . لكن إذا تجاوزنا الجانب الرسمي لتناظر الأفراد والمتغيرات نستطيع استخدام اللاتناظر المتعلق بالدلالات أي المتغيرات ليس لديها نفس المعنى كالأفراد.

نستطيع القيام بالتحليل التالي: قمنا بتمثيل الأفراد في فضاء المتغيرات الأصلية ثم قمنا بتغيير الأساس في هذا الفضاء، المحاور الجديدة عبارة عن تركيبة خطية للمحاور القديمة ويمكن اعتبارها متغيرات جديدة تمثل تركيبة خطية للمتغيرات القديمة، "نسمي هذه المتغيرات الجديدة بالمركبات الرئيسية".

نرمز بـ $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_p$ للمركبات الرئيسية، حيث تمثل Z_k المتغيرة الجديدة المقابلة للمحور Δ_k :

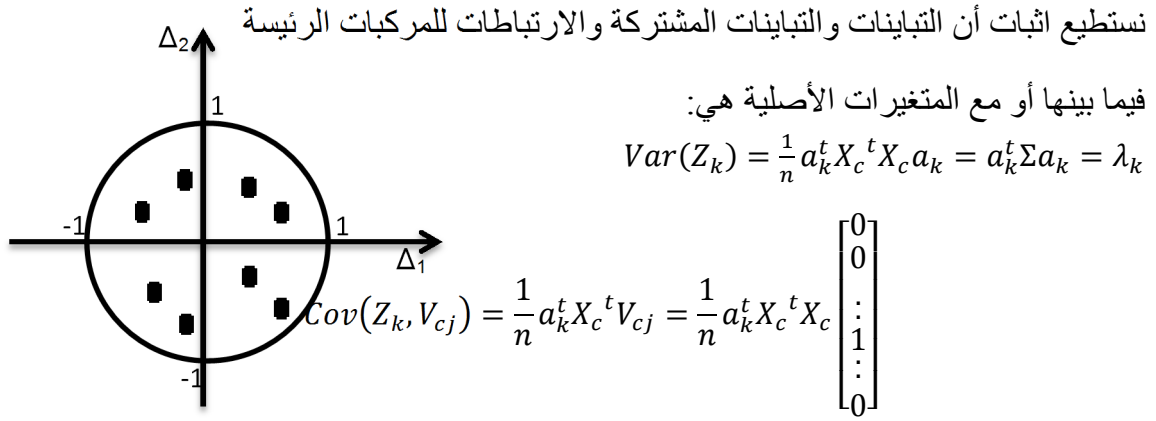
$$Z_k = \sum_{j=1}^p \alpha_{kj} V_{cj} = X_c a_k$$

$$Z = [Z_1, Z_2, \dots, Z_p] = X_c A$$

فيكون من المهم معرفة كيفية ارتباط المتغيرات القديمة بالمتغيرات الجديدة عن طريق حساب الارتباط بين المتغيرات القديمة والجديدة.

يكون تمثيل المتغيرات القديمة بأخذ إحداثيات المتغيرات القديمة عبارة عن معاملات الارتباط مع المتغيرات الجديدة.

يطلق اسم دائرة الارتباطات لسبب أن قيمة معامل الارتباط محصورة بين 1- و 1+ فيكون تمثيل المتغيرات عبارة عن نقاط تقع داخل دائرة نصف قطرها يساوي 1.



$$= a_k^t \Sigma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_k a_k^t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_k a_{kj}$$

$$Cor(Z_k, V_{cj}) = \sqrt{\lambda_k} \frac{a_{kj}}{\sqrt{Var(V_j)}}$$

حيث يمثل a_{kj} الإحداثية رقم j لشعاع الاتجاه الواحد a_k لـ Δ_k عموما تكون مصفوفة التباين والتباين المشترك للمركبات الرئيسية:

$$\Sigma_Z = \frac{1}{n} A^t X_c^t X_c A = A^t \Sigma A = \Lambda$$

حيث تمثل Λ المصفوفة القطرية للقيم الذاتية لـ Σ .

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$$

ومصفوفة التباين المشتركة بين المركبات الرئيسية والمتغيرات القديمة:

$$\text{Cov}(Z, V) = \frac{1}{n} X_c^t X_c A = \Sigma A = A \Lambda$$

إذا لاحظنا أن تباين المتغير يساوي مربع طاولة الشعاع الذي يمثلته في الفضاء الأقليدي وأن معامل الارتباط بين متغيرين يساوي إلى الجداء السلمي للشعاعين اللذان يمثلهما أيضا في الفضاء الإقليدي، فنستطيع تفسير زاوية الأشعة كارتباطات.

9-1- تفسير المحاور بدلالة المتغيرات القديمة:

يشرح متغير قديم V_j بشكل أكثر محور رئيسي كلما كان ارتباطه أكبر مع المركبة الرئيسية الموافقة لهذا المحور.

9-2- نوعية تمثيل المتغيرات:

يكون متغير ممثلا جيدا على محور كلما كان ارتباطه مع المركبة الرئيسية الموافق لهذا المحور قريب بالقيمة المطلقة من الواحد، أي إذا كان قريب من محيط دائرة الارتباط لأن هذا يعني أن $\cos$ زاوية الشعاع الذي يربط المبدأ بالنقطة التي تمثل المتغير مع المستوي، تكون قريبة من الواحد في القيمة المطلقة.

9-3- دراسة الارتباطات بين المتغيرات:

نستطيع استخدام دائرة الارتباطات لتفسير مواقع المتغيرات القديمة فيما بينها في شكل ارتباطات، مثلا تكون نقطتين قريبتين من محيط الدائرة (ممثلتين جيدا في المستوى) مرتبطتين طرديا وبشدة، وإذا كانتا قريبتين من المحيط الدائرة لكن في مواقع متناظرة فتكونا مرتبطتين عكسيا وبشدة، في المقابل إذا كانتا قريبتين من محيط الدائرة ويشكل الشعاعين اللذان يربطاهما بالمبدأ زاوية قائمة فالمتغيرين غير مرتبطين.

10- تحليل المركبات الرئيسية النظامية:

في التحليل السابق والذي يسمى بتحليل المركبات الرئيسية البسيطة تم منح للأفراد نفس الوزن وتعاملنا مع المتغيرات بشكل متناظر (نم منح نفس الدور لكل المتغيرات) وتم استنتاج المحاور الجديدة من مصفوفة التباين والتباين المشترك للمتغيرات Σ .

يقابل هذا التحليل بعض الانتقادات تتمثل في:

- ✓ إذا كانت المتغيرات القديمة غير متجانسة مثل الأوزان والطول والعمر، فكيف يمكن إعطاء معنى للمركبات الرئيسية التي تعتبر تركيبة خطية لمركبات غير متجانسة.
- ✓ إذا غيرنا الوحدات بالنسبة للمتغيرات فإن النتيجة تتغير في كل مرة.
- ✓ تكون مساهمة متغير ما في صناعة المحاور الأولى كبيرة كلما كان تباين هذا المتغير كبير.

من أجل تجنب هذه العقبات نتعامل مع متغيرات نظامية أي متغيرات بدون بعد، يمكن الحصول على متغيرات نظامية بقسمة المتغيرات الممركزة على الانحراف المعياري (متغيرات مركزية معيارية)، هذا سيقودنا إلى القيام بنفس تحليل البسيط للمركبات الرئيسية لكن باختيار مسافة أقليلية بين الأفراد مخالفة عن المسافة التقليدية. وتكون المسافة المختارة:

$$d^2(u_i, u_{i'}) = \sum_{j=1}^p \frac{1}{\sigma^2} (x_{ij} - x_{i'j})^2$$

تمكن هذه المسافة من إعطاء أدوار منصفة للمتغيرات والتخلي عن المعالجة المتناظرة. عند القيام بمختلف الحسابات الخاصة بطريقة المركبات الرئيسية في حالة متغيرات معيارية مركزية نعتمد على مصفوفة الارتباطات R لاستخراج المحاور الجديدة، مصفوفة الارتباطات تحتوي إلا الواحد في قطرها الرئيسي وبالتالي فإن أثرها يساوي دوماً p أي عدد المتغيرات الداخلة في التحليل ، وبالتالي فإن العزم الكلي لسحابة الأفراد في R^p يساوي دوماً p عند استخدام طريقة تحليل المركبات الرئيسية النظامية.

يمكن الخروج بقاعدة من أجل اختيار المحاور التي يجب الاحتفاظ بها ،حيث لدينا p قيم ذاتية مجموعها يساوي الواحد، فنعتبر فقط القيم التي تفوق الواحد تكون معنوية وبالتالي يتم بهذا المقتضى باختيار بعد الفضاء الشعاعي الجديد .