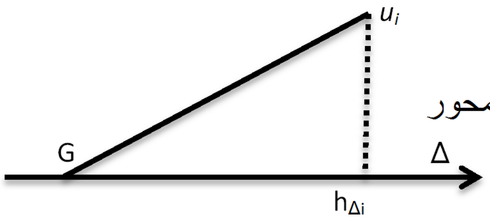
4-1- عزم سحابة الأفراد بالنسبة للمحور Δ المار من G :



يعطى هذا العزم بالعلاقة التالية: $I_\Delta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d^2(h_{\Delta i},\ u_i)$

حيث يمثل $h_{\Delta i}$ الإسقاط العمودي لـu_i على Δ، ويقيس هذا العزم قرب المحور من سحابة الأفراد.

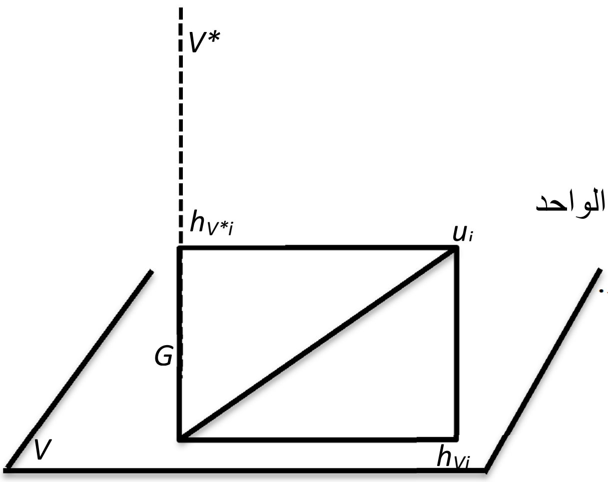
4-2- عزم سحابة الأفراد بالنسبة للفضاء الشعاعي الجزئي V:

يعطى عزم سحابة الأفراد بالنسبة للفضاء الشعاعي الجزئي V والمار على G على بالعلاقة التالية: $I_V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d^2(h_{Vi},\ u_i)$ حيث يمثل h_{Vi} الإسقاط العمودي لـu_i على الفضاء الشعاعي الجزئي V.

4-3- تفكيك العزم الكلي:

إذا رمزنا بـ V^* للمتمم العمودي لـV في R^p و h_{V^*i} الإسقاط العمودي لـu_i على الفضاء الشعاعي الجزئي V^*،باستخدام نظرية فيتاغور (Pythagore) :

$$d^2(h_{Vi}, u_i) + d^2(h_{V^*i}, u_i) = d^2(G, h_{Vi}) + d^2(G, h_{V^*i})$$



باستخدام نظرية (Huygens)

$$I_G = I_V + I_{V^*}$$

في الحالة التي يكون فيها بعد الفضاء الشعاعي الجزئي يساوي الواحد (أي محور) فيكون I_{V^*} قياس لتمدد السحابة حسب هذا المحور.

يمكن اعتبار I_{V^*} أنه العزم المحمول بالمحور أو العزم المفسر بالمحور.

بإسقاط سحابة الأفراد على فضاء شعاعي جزئي V نفقد العزم المقاس بـI_V ونحتفظ فقط بالعزم المقاس بـI_{V^*} ، بالإضافة إلى ذلك عندما نقسم الفضاء الشعاعي إلى مجموع فضاءات شعاعية ذات بعد يساوي 1 ومتعامدة:

$$\Delta_1 \oplus \Delta_2 \oplus \Delta_3 \oplus \ldots\ldots \oplus \Delta_p$$

نستطيع كتابة : $I_G = I_{\Delta^*_1} + I_{\Delta^*_2} \ldots\ldots\ldots + I_{\Delta^*_p}$

5- البحث عن المحور الذي يمر بـ G وذو عزم أدنى:

نبحث عن المحور Δ_1 الذي يمر بـ G وذو أدنى عزم $\boldsymbol{I_{\Delta_1}}$ لأنه يمثل المحور الأقرب من نقاط سحابة الأفراد وبالتالي فإن اسقاط السحابة على هذا المحور يعطي أحسن تمثيل (أقل تشويه للصورة الحقيقية).

البحث عن Δ_1 بحيث يكون $\boldsymbol{I_{\Delta_1}}$ أصغر ما يمكن يكافئ البحث عن Δ_1 بحيث يكون العزم $\boldsymbol{I_{\Delta_1^*}}$ أكبر ما يمكن(أعظم).

$$Min\, I_{\Delta_1} \Leftrightarrow Max\, I_{\Delta*_1}$$

نعرف المحور Δ_1 بشعاع التوجيه الأحادي $\overrightarrow{Ga}$،حيث يجب ايجاد $\overrightarrow{Ga}$ بحيث يكون $\boldsymbol{I_{\Delta_1^*}}$ كبر ما يمكن تحت قيد $\|\overrightarrow{Ga_1}\|^2 = 1$

<u>5-1- العبارة الجبرية لـ $\boldsymbol{I_{\Delta_1^*}}$ و$\|\overrightarrow{\boldsymbol{Ga_1}}\|^2$:</u>

$$d^2\left(G, h_{\Delta_1 i}\right) = \langle \overrightarrow{Gu_\iota}, \overrightarrow{Ga_1} \rangle^2 = a_1^t U_{ci}{}^t U_{ci} a_1$$

باستخدام خاصية التناظر في الجداء السلمي:

$$I_{\Delta_1^*} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_1^t U_{ci}{}^t U_{ci} a_1 = a_1^t \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_{ci}{}^t U_{ci}\right] a_1$$

كما تم الإشارة له من قبل يمكن التعرف على مصفوفة التباين والتباين المشترك بين الحاضنتين أي Σ.

$$I_{\Delta_1^*} = a_1^t \Sigma a_1 \qquad ; \|\overrightarrow{Ga_1}\|^2 = a_1^t a_1$$

<u>5-2- البحث عن النقطة العظمى:</u>

يتمثل المشكل في ايجاد a_1 بحيث يكون $a_1^t \Sigma a_1$ أعظمي تحت قيد $a_1^t a_1 = 1$ (يمثل مشكل البحث عن النقاط العظمى للدوال المتعددة والمرتبطة بقيد) حيث يمكن استخدام طريقة لانجرانج (Lagrange).

$$g(a_1) = g\left(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1p}\right) = a_1^t \Sigma a_1 - \lambda_1 (a_1^t a_1 - 1)$$

$$\frac{\partial g(a_1)}{\partial a_1} = 2\Sigma a_1 - 2\lambda_1 a_1$$

$$\begin{cases} \sum a_1 - \lambda_1 a_1 = 0 \dots\dots 1 \\ a_1^t a_1 - 1 = 0 \dots\dots .2 \end{cases}$$

من (1) نستطيع القول أنa_1 هو الشعاع الذاتي للمصفوفة Σ المرافق للقيمة الذاتية λ_1، بضرب من اليسار طرفي المعادلة (1) بـ $a_1{}^t$ نحصل على:

$$a_1^t \sum a_1 - \lambda_1 a_1^t a_1 = 0 \Rightarrow a_1^t \sum a_1 = \lambda_1$$

الطرف الأول من النتيجة أعلاه وكما تم الإشارة له يمثل العزم Δ_1^* والذي يجب أن يكون اكبر ما يمكن (أعظمي) وهذا يدل على أن λ_1 تمثل أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة Σ وتمثل العزم المحمول بالمحور Δ_1 .

المحور Δ_1 الذي من أجله تكون سحابة الأفراد لديها عزم أدنى لديها شعاع توجيه وحدوي يمثل أول شعاع ذاتي والموافق لأكبر قيمة ذاتية لمصفوفة التباين والتباين المشترك Σ.

مثال:

6- البحث عن المحاور الأخرى:

نقوم بعدها بالبحث عن محور ثاني Δ_2 متعامد مع المحور الأول وذو عزم أدنى، كما سبق يمكن تحديد المحور Δ_2 المار بـG بشعاع التوجيه الوحدوي a_2. عزم سحابة الأفراد بالنسبة لمتممها العمودي يساوي:

$$I_{\Delta_2^*} = a_2^t \Sigma a_2$$

بمراعاة القيدين التالين:

$$a_2^t a_2 = 1 \quad ; \; a_2^t a_1 = 0$$

ينص القيد الثاني على أن المحور الثاني متعامد مع المحور الأول أي أن جداء شعاعي التوجيه يساوي الصفر، بتطبيق طريقة لانجرانج بقيدين نجد أن a_2 هو شعاع ذاتي موافق لثاني أكبر قيمة ذاتية لمصفوفة التباين والتباين المشترك، نستطيع إثبات بأن المستوي المعرف بالمحورين Δ_1 و Δ_2 هو الفضاء الشعاعي الجزئي ذو بعد 2 والذي يحمل أكبر العزم (الأعظمي).

نستطيع البحث عن محاور جديدة بإتباع نفس الخطوات السابقة حيث تكون هذه المحاور عبارة عن الأشعة الذاتية لمصفوفة التباين والتباين المشترك والموافقة للقيم الذاتية المرتبة، بما أن المصفوفة التباين والتباين المشترك Σ حقيقية متناظرة فلديها p قيمة ذاتية حقيقية تشكل أساس للفضاء الشعاعي الجزئي.

$$\begin{cases} \Delta_1 \perp \Delta_2 \perp \cdots \perp \Delta_p \\ a_1 \perp a_2 \perp \cdots \perp a_p \\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots .. \geq \lambda_p \\ I_{\Delta_1^*} \geq I_{\Delta_2^*} \geq \cdots \geq I_{\Delta_p^*} \end{cases}$$

ننتقل من الأساس العمودي الأول للمتغيرات الممركزة إلى الأساس العمودي الجديد المشكل من الاشعة الذاتية ويسمى بالمحاور الرئيسية.

7- مساهمة المحاور في العزم الكلي:

باستخدام نظرية (Huygens) نستطيع تقسيم العزم الكلي لسحابة الأفراد:

$$I_G = I_{\Delta_1^*} + I_{\Delta_2^*} + \cdots + I_{\Delta_p^*} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots .. + \lambda_p$$

المساهمة المطلقة للمحور Δ_k في العزم الكلي لسحابة الأفراد يساوي:

$$ca(\Delta_k / I_G) = \lambda_k$$

القيمة الذاتية المرفقة بهذا المحور.

المساهمة النسبية للمحور Δ_k في العزم الكلي لسحابة الأفراد يساوي:

$$cr(\Delta_k / I_G) = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots .. + \lambda_p}$$

نستخدم عبارة نسبة (نسبة مئوية) العزم المفسر بـΔ_K .

يمكن أيضا حساب النسبة المئوية للعزم المفسر بالمستوي المولد بالمحورين الأوليين Δ_1 وΔ_2

$$cr(\Delta_1 \oplus \Delta_2/I_G) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots .. + \lambda_p}$$

تعتبر النسب المئوية للعزوم مؤشرات تساعد على التعرف على حصة التغير لسحابة الأفراد المفسرة بهذه الفضاءات الشعاعية الجزئية، وبتالي يمكن التخلي عن التغير المفسر لهذه المحاور إذا كانت القيم الذاتية صغيرة.

نكتفي بتمثيلات لسحابة الأفراد في فضاء شعاعي جزئي مولدة بـ d محاور أولية بشرط أن تكون نسبة تفسير هذا الفضاء الشعاعي الجزئي قريبة من الواحد وبالتالي نقلص التحليل إلى قضاء شعاعي جزئي ذو بعد $d < p$ عادة ما تكون d=2.

<u>مثال:</u> تعطى الأشعة الذاتية لمصفوفة التباين والتباين المشترك لمثال نقاط الطلبة:

$$\Sigma = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 34.83 & 43.33 & -23.83 & -30.5 \\ 43.33 & 57.33 & -24.33 & -39 \\ -23.83 & -24.33 & 34.83 & 34.5 \\ -30.5 & -39 & 34.5 & 57.5 \end{bmatrix}$$

القيم الذاتية:

24.464 4.47 1.778 0.038

الأشعة الذاتية:

a_1	a_2	a_3	a_4
0.44732005	0.35003334	-0.27490675	0.77031019
0.57422343	0.5863205	0.12177567	-0.56155613
-0.39506572	0.49075026	0.72919561	0.27037888
-0.56044206	0.54117382	-0.6147119	-0.13480428

يمكن التأكد أن طاولة كل شعاع تساوي1: $\|a_1\|^2 = \|a_2\|^2 = \|a_3\|^2 = \|a_4\|^2$

$$\|a_1\|^2 = (0.4473)^2 + (0.574)^2 + (-0.395)^2 + (-0.56)^2 \approx 1$$

وأن الأشعة مثنى مثنى متعامدة أي جداؤهما السلمي يساوي الصفر:

$$\langle a_1, a_2\rangle = \langle a_1, a_3\rangle = \langle a_1, a_4\rangle = \langle a_2, a_3\rangle = \langle a_2, a_4\rangle = \langle a_3, a_4\rangle \approx 0$$

مثال:

$$\langle a_1, a_3\rangle = (0.4473)(-0.275) + (0.574)(0.122) + (-0.395)(0.729) + (-0.56)(-0.615) = 0$$

نلخص النتائج السابقة في الجدول التالي:

العزم الكلي:

$$I_G = tr(\Sigma) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 30.75$$

	المساهمة المطلقة $\boldsymbol{ca(\Delta_k/I_G) = \lambda_k}$	**المساهمة النسبية** $cr(\Delta_k/I_G) = \dfrac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots .. + \lambda_p}$	**نسبة تمثيل المستوى**
المحور الأول	24.464	79.56%	79.56%
المحور الثاني	4.47	14.54%	94.04%
المحور الثالث	1.778	5.78%	99.88%
المحور الرابع	0.038	1.23%	100%

اختيار المحور الأول والثاني يعطي نسبة تمثيل جد جيدة وتقدر بـ94.04%

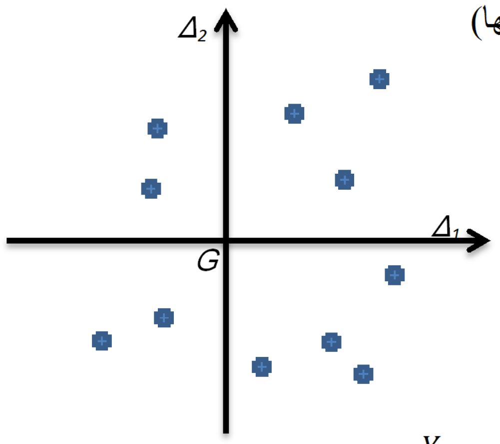
8- تمثيل الأفراد في المحاور الجديدة:

من أجل تمثيل الأفراد المستوي المعرفة بالمحاور الجديدة نقوم بحساب إحداثيات الأفراد في المحاور الجديدة حيث يمثل y_{ik} إحداثيات الوحدة u_i في المحور Δ_k، نسقط عموديا الشعاع $\overrightarrow{Gu_i}$ على هذا المحور فنحصل:

$$y_{ik} = \langle \overrightarrow{Gu_i}, \overrightarrow{a_k} \rangle = a_k^t U_{ci}$$

$$Y_i = A^t U_{ci}$$

حيث يمثل Y_i شعاع إحداثيات الوحدة u_i و A مصفوفة تغيير الأساس (مصفوفة الأشعة الذاتية المتعامدة والتي طاولتها تساوي 1 ومعكوسها يساوي منقولها)



ملاحظة :

اختيار بين المحاور ليس لديه أثر على التحليل

(اختيار في محور الترتيب أو الفواصل لا يهم).

مثال: احداثيات الوحدة u_4 (خديجة)

$$Y_4 = A^t u_{c4} = u_{c4} = \begin{bmatrix} 1.83 \\ 2.33 \\ -1.83 \\ -2.5 \end{bmatrix}$$

8-1- نوعية تمثيل الأفراد: