

II.3.2. Vibration forcée :

Supposons que le système de la Fig. II.1 soit soumis à une charge $p(t)$ harmonique de forme sinusoïdale présentant une amplitude p_0 et une fréquence circulaire (excitation) $\bar{\omega}$ variant harmoniquement, comme le montre l'équation du mouvement.

$$M\ddot{x} + kx + C\dot{x} = p(t)$$

Où :

$$p(t) = p_0 \sin \bar{\omega} t$$

Avant de considérer ce cas d'amortissement, il est utile d'examiner le comportement d'un système non amorti.

II.3.2.1. Vibration forcée d'un système non amorti :

Le comportement d'un système non amorti contrôlé par l'équation :

$$M\ddot{x} + kx = p_0 \sin \bar{\omega} t$$

qui a une solution complémentaire de la forme de vibration libre :

$$x_c(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

La solution générale doit également inclure la solution particulière qui dépend directement à la forme du chargement dynamique. Dans ce cas de chargement harmonique, il est raisonnable de supposer que le mouvement correspondant est harmonique et en phase avec le chargement ; ainsi, la solution particulière est :

$$x_p(t) = C \sin \bar{\omega} t$$

dans lequel l'amplitude C doit être évaluée.

En remplaçant la solution particulière dans l'équation du mouvement donne

$$-MC\bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} t + kC \sin \bar{\omega} t = p_0 \sin \bar{\omega} t$$

En divisant par $\sin \bar{\omega} t$ (qui est non nul en général) et par k et en notant que $\omega^2 = \frac{k}{M}$, on obtient après un certain réarrangement :

$$C = \frac{p_0}{k} \left[\frac{1}{1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2}} \right] = \frac{p_0}{k} \left[\frac{1}{1 - \beta^2} \right]$$

Où β est le rapport de la fréquence de charge appliquée à la fréquence propre d'oscillation, où le rapport de fréquence est :

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$

Alors la solution particulière s'écrit :

$$x_p(t) = \frac{p_0}{k} \left[\frac{1}{1 - \beta^2} \right] \sin \bar{\omega} t$$

La solution générale correspond à une excitation appliquée à un système non amorti est maintenant obtenu en combinant la solution complémentaire et la particulière qui dépend de la forme du chargement dynamique, ainsi, on obtient :

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) + \frac{p_0}{k} \left[\frac{1}{1 - \beta^2} \right] \sin \bar{\omega} t$$

Où les valeurs de A et B dépendent aux conditions initiales.

Pour le système qui commence à partir de repos, c'est-à-dire que $x(t=0) = 0$ et $\dot{x}(t=0) = 0$, il est facile de montrer que :

$$B = 0, \text{ et } A = -\frac{p_0 \beta}{k} \left[\frac{1}{1 - \beta^2} \right]$$

La solution générale devient :

$$x(t) = \frac{p_0}{k} \left[\frac{1}{1 - \beta^2} \right] (\sin \bar{\omega} t - \beta \sin(\omega t))$$

Où :

$\frac{p_0}{k} = x_{st}$: est le déplacement statique, c'est-à-dire le déplacement qui serait produit par la charge p_0 appliquée statiquement.

$\frac{1}{1 - \beta^2}$: est le facteur d'amplification représentant l'effet de la charge appliquée harmoniquement.

$\sin \bar{\omega} t$: représente la composante de réponse à la fréquence du chargement appliqué, la réponse en oscillation directement liée au chargement appliquée.

$\beta \sin(\omega t)$: est le composant de la réponse à la fréquence propre du système sous l'effet de vibration libre qui dépend aux conditions initiales.

II.3.2.2. Vibration forcée d'un système amorti :

Revenant à l'équation du mouvement, y compris l'amortissement, en divisant par M et en notant que $\frac{c}{M} = 2\xi\omega$ conduit à :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2 x = \frac{p_0}{M} \sin \bar{\omega} t$$

La solution générale est :

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

La solution complémentaire de cette équation est :

$$x(t) = [A \sin(\omega_D t) + B \cos(\omega_D t)] e^{-\xi\omega t}$$

La solution particulière est de la forme :

$$x(t) = G_1 \sin(\bar{\omega} t) + G_2 \cos(\bar{\omega} t)$$

dans lequel le second terme ($G_2 \cos(\bar{\omega} t)$) est requis car, en général, la réponse d'un système amorti n'est pas en phase avec le chargement appliquée.

En remplaçant l'équation particulière dans l'équation du mouvement :

$$\begin{aligned} -G_1 \bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} t - G_2 \bar{\omega}^2 \cos \bar{\omega} t + 2\xi\omega(G_1 \bar{\omega} \cos \bar{\omega} t - G_2 \bar{\omega} \sin \bar{\omega} t) + \omega^2 [G_1 \sin(\bar{\omega} t) + G_2 \cos(\bar{\omega} t)] \\ = \frac{p_0}{M} \sin \bar{\omega} t \end{aligned}$$

$$[-G_2 \bar{\omega}^2 + G_1 \bar{\omega} (2\xi\omega) + G_2 \omega^2] \cos(\bar{\omega} t) + \left[-G_1 \bar{\omega}^2 - G_2 \bar{\omega} (2\xi\omega) + G_1 \omega^2 - \frac{p_0}{M} \right] \sin(\bar{\omega} t) = 0$$

Afin de satisfaire cette équation pour toutes les valeurs de t , il est nécessaire que chacune des deux termes de sinus et cosinus soit égale à zéro ; ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
-G_2\bar{\omega}^2 + G_1\bar{\omega}(2\xi\omega) + G_2\omega^2 &= 0 \rightarrow G_12\xi\omega\bar{\omega} + G_2(\omega^2 - \bar{\omega}^2) = 0 \\
-G_1\bar{\omega}^2 - G_2\bar{\omega}(2\xi\omega) + G_1\omega^2 - \frac{p_0}{M} &= 0 \rightarrow G_1(\omega^2 - \bar{\omega}^2) - G_22\xi\omega\bar{\omega} - \frac{p_0}{M} = 0
\end{aligned}$$

Et les fonctions sinus et cosinus ne s'annulent simultanément.

Ces deux équations deviennent être satisfaites individuellement en divisant par ω^2 :

$$\begin{aligned}
G_12\xi\frac{\bar{\omega}}{\omega} + G_2\left(1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2}\right) &= 0 \rightarrow G_12\xi\beta + G_2(1 - \beta^2) = 0 \\
G_1\left(1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2}\right) - G_22\xi\frac{\bar{\omega}}{\omega} - \frac{p_0}{M\omega^2} &= 0 \rightarrow G_1(1 - \beta^2) - G_22\xi\beta - \frac{p_0}{k} = 0
\end{aligned}$$

La résolution de ces deux équations donne :

$$\begin{aligned}
G_1 &= \frac{p_0}{k} \left[\frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right] \\
G_2 &= \frac{p_0}{k} \left[\frac{-2\xi\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right]
\end{aligned}$$

Introduire ces expressions dans la solution particulière et en combinant le résultat avec la solution complémentaire, la solution générale est obtenue sous la forme :

$$\begin{aligned}
x(t) &= [A\sin(\omega_D t) + B\cos(\omega_D t)] e^{-\xi\omega t} \\
&\quad + \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} [(1 - \beta^2)\sin(\bar{\omega}t) - (2\xi\beta)\cos(\bar{\omega}t)] \\
x(t) &= [A\sin(\omega_D t) + B\cos(\omega_D t)] e^{-\xi\omega t} + \rho\sin(\bar{\omega}t - \theta)
\end{aligned}$$

Le premier terme de cette équation représente la réponse transitoire qui disparaît rapidement avec le temps et ne représente que peut intérêt, tandis que le deuxième terme représente la réponse permanente, sa fréquence est elle de la charge appliquée mais avec un déphasage, alors la solution devient :

$$x(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} [(1 - \beta^2)\sin(\bar{\omega}t) - (2\xi\beta)\cos(\bar{\omega}t)] = \rho\sin(\bar{\omega}t - \theta)$$

Le module ρ de la résultante représente l'amplitude de la réponse permanente :

$$\rho = \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} = \frac{p_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{p_0}{k} D$$

La solution du mouvement permanent :

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} [(1 - \beta^2)\sin(\bar{\omega}t) - (2\xi\beta)\cos(\bar{\omega}t)] \\
&= \frac{p_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \sin(\bar{\omega}t - \theta)
\end{aligned}$$

Avec $\beta = \sqrt{1 - 2\xi^2}$, est définie si et seulement si $1 - 2\xi^2 > 0 \rightarrow \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Où :

$\frac{p_0}{k}$: est le coefficient représente le déplacement statique du système sous l'action de la force p_0 .

$D = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{1}{2\xi} \frac{\omega}{\omega_D}$: est le rapport de l'amplitude de réponse en mouvement permanent et du déplacement statique qui serait produit par la force p_0 s'appelle **facteur d'amplification dynamique**.

Ce facteur d'amplification dynamique est représenté sur la Fig. II.7 en fonction du rapport β . Il vaut bien évidemment 1 pour un chargement statique. Lorsque $\bar{\omega}$ tend vers l'infini, D tend vers 0 quelle que soit la valeur de ξ . A très haute fréquence, les forces d'inertie deviennent prépondérantes devant les forces élastique F_K et d'amortissement F_C ; elles tendent vers l'infini et s'opposent au mouvement : la masse reste "immobile".

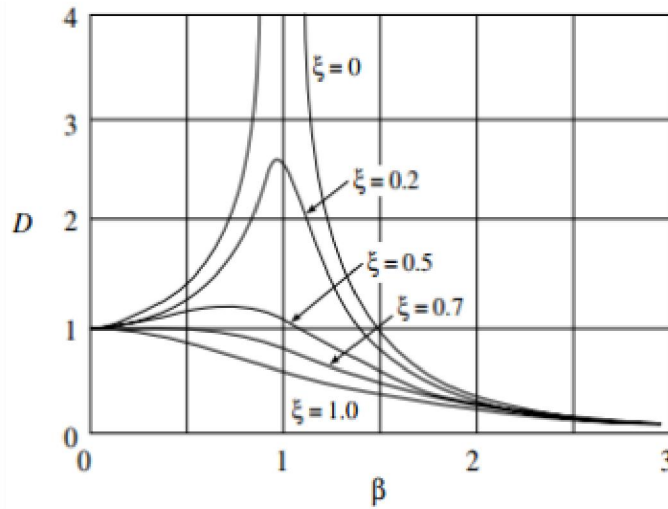


Figure II.7. Facteur d'amplification dynamique.

Lorsque la pulsation $\bar{\omega}$ de la sollicitation coïncide avec la pulsation propre ω de l'oscillateur ($\bar{\omega} = \omega$) « **la résonance** », le facteur d'amplification D passe par un maximum égal à :

$$D_{max} = \frac{1}{2\xi} \text{ Où } \beta = 1$$

Ce phénomène est connu sous le nom de résonance. Lorsque l'amortissement est nul, D_{max} devient infini.

La phase θ est donnée par la formule ci-dessus est représentée sur la Fig. II.8 en fonction de β :

$$\theta = \text{Arctg} \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

Où : $0^\circ < \theta < 180^\circ$

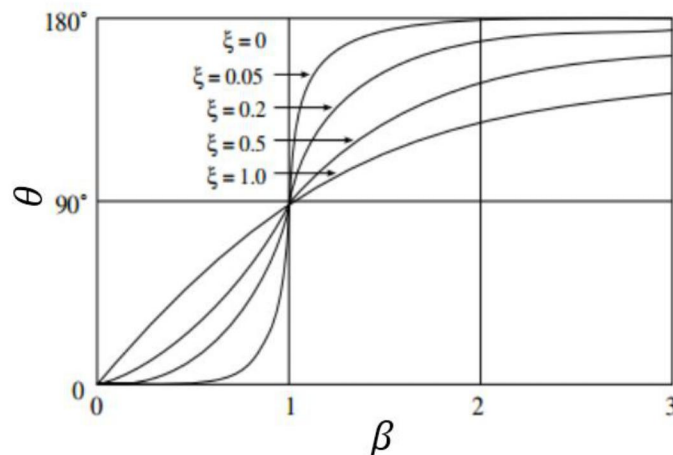


Figure II.8. Phase de la réponse stationnaire.

A faible fréquence, la phase est nulle ou négligeable : le système répond instantanément à la sollicitation. Lorsque la résonance est atteinte ($\beta = 1$), il se produit un déphasage de 90° entre force appliquée et déplacement résultant : le déplacement est nul lorsque la force est maximale, et vice-versa. A haute fréquence, le déplacement est maximal, en valeur absolue, au même instant que la force mais se produit dans la direction opposée à la force. Rappelons que corrélativement, comme on l'a vu précédemment, son amplitude tend vers 0.