

Chapitre I : Introduction et généralistes

I.1. Généralités :

I.1.1 Objectif fondamental de la dynamique des structures (DDS) :

Le but principal de la DDS est de présenter des méthodes permettant l'étude des **contraintes** et le **déplacement** communiqués à une structure donnée soumise à un chargement (force) dynamique arbitraire (ou force horizontale).

I.2. Exemple de charges dynamiques :

Pratiquement toutes les structures sont soumises à des charges dynamiques pendant leur durée de vie. A cet effet deux approches fondamentalement différentes qui s'offrent à nous pour évaluer la réponse de la structure.

- Approche aléatoire (charge aléatoire)
- Approche déterministe (charge déterministe)

I.2.1. Approche déterministe :

Si le chargement dont l'évolution est connue dans le temps c'est-à-dire l'amplitude, la direction et le temps d'application sont connus à tout instant.

Que le chargement soit périodique ou non périodique (irrégulier) on peut dire que le calcul de la réponse à ce type de chargement est un calcul déterministe.

I.2.2. Approche aléatoire :

Si le chargement dont l'évolution n'est pas connue dans le temps, ce chargement peut être défini ou décrit de façon statistique (moyenne, écart type, contenu fréquentiel, ... etc.).

Exemple de charge aléatoire :

- Vibration sur piste,
- Vibration sur tribune de stade,
- Séisme futur,
- Pression du vent sur un bâtiment.

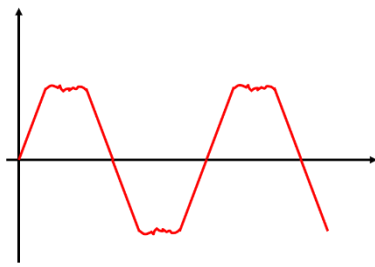
I.3. Type de sollicitation (ou chargement) :

D'un point de vue analytique, on peut subdiviser ou classer les chargements de type déterministe en deux grandes catégories principales :

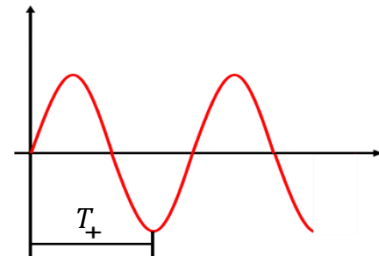
- Sollicitation de type périodiques,
- Sollicitation de type a périodiques (non périodique).

I.3.1. Chargements périodiques :

Les chargements périodiques présentent la particularité d'être caractérisée par une variation temporelle similaire qui conserve la même évolution dans un grand nombre de cycle. Les chargements périodiques les plus simples peuvent se former sous forme sinusoïdale qu'on appelle **harmonique simple**.



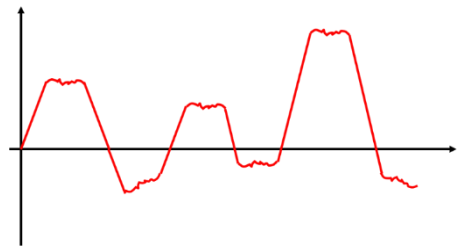
Mouvement périodique



Mouvement harmonique simple

I.3.2. Chargement apériodique :

Cas d'une structure soumise à un chargement ou un chargement de type **explosif** par des impulsions très courtes durées ou de grande durée de forme quelconque ($\forall$) (chocs, explosifs, etc.)



I.4. Caractéristique et différences essentielles entre un problème dynamique et un problème statique :

Le problème de dynamique des structures se distingue du problème de statique correspondant par deux caractéristiques importantes ou deux aspects fondamentaux. (Le mode d'équilibre des efforts internes de réduction).

La charge statique est une charge dont l'amplitude, la direction et le point d'application ne varient avec le temps, de sorte qu'on ne tient pas compte des effets d'inertie.

La variation du chargement avec le temps c'est une charge dynamique, est une charge dont l'amplitude, la direction et le point d'application varient avec le temps, sont en mesure de créer des effets d'inertie.

Le but premier de la dynamique des structures consiste à déterminer les variations dans le temps des contraintes et des déplacements engendrés par un chargement dynamique quelconque.

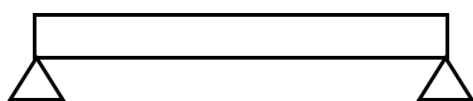
Dans ce contexte l'analyse statique représente un cas particulier de l'analyse dynamique.

I.5. Méthode de discrétisation :

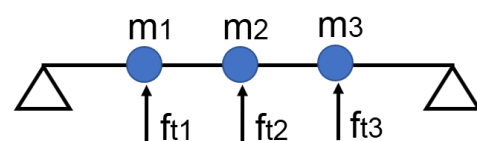
La figure (b) possède un nombre infini de **degré de liberté**, la réduction du nombre de degré de liberté peut être distinguée par trois méthodes de **discrétisation**.

I.5.1. Concentration de masses :

Le nombre de composant de déplacement à considérer pour pouvoir représenter les effets de toutes les forces d'inertie qui interviennent dans une structure peut être appelé **nombre de degré de liberté dynamique de la structure (D.D.L.D.)**.



Système réel

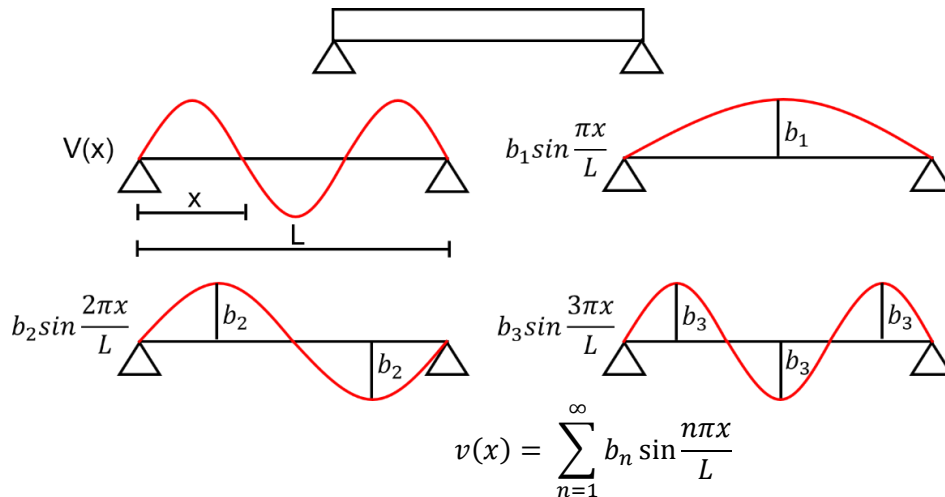


Idéalisation d'une poutre simple par concentration de la masse

L'idéalisation par concentration des masses procure un moyen simple pour limiter le nombre de degré de liberté à considérer.

I.5.2. Déplacements généralisés :

Cette approche est fondée sur l'hypothèse selon laquelle la déformée c'est l'ensemble des flèches définissant la configuration de la structure après déplacement, peut être exprimée comme une combinaison linéaire de certains motifs de déplacement et cela afin de limiter le nombre de degré de liberté.



Les masses concentrées dans l'autre approche sont représentées les fonctions de déformée, c'est une modélisation limitée à trois degrés de liberté.

Le nombre matif représente la déformée compatible avec les conditions géométriques imposées par les appuis.

Le nombre de terme de la série (série de Forée) est fonction du nombre de degré de liberté qui est trois (c'est une approximation) et qui représente la continuité voulue des déplacement internes.

Une expression généralisée pour les déplacements de toutes structures unidimensionnelles peut dois s'écrire :

$$v(x) = \sum_n z_n \Psi_n(x)$$

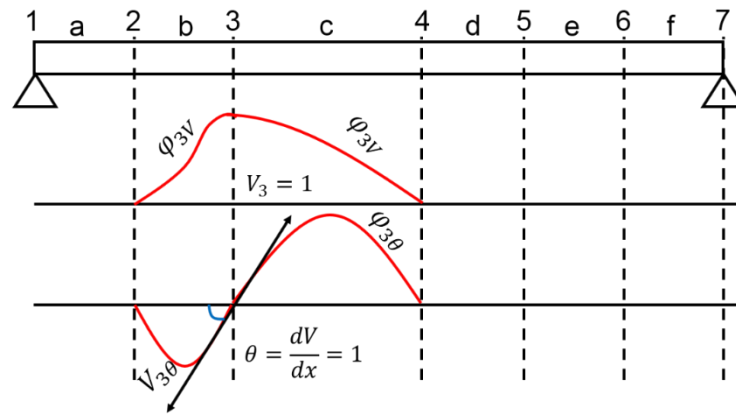
$\psi_n(x)$: la fonction de déplacement,

z_n : forme résultante de la structure dépend de leurs amplitudes appelées coordonnées généralisés.

Cette méthode fournit une des plus grandes précisions que la première méthode, mais un problème se pose qui conduit à la plus grande complexité numérique concernant le couplage des forces d'inertie aux degrés de liberté de la structure à étudiée.

I.5.3. Méthode des éléments finis :

C'est la troisième méthode de discrétisation l'idéalisation du type « **élément fini** » est applicable à des structures de tout genre.



Coordonnées typiques d'une représentation de poutre par éléments finis (poutre devisée en un certain nombre de segment).

Les déplacements de chaque point de la structure complète peuvent être exprimées en fonction des coordonnées généralisées pour l'intermédiaire d'un certain nombre de fonction de déplacement choisis en utilisant l'expression suivante :

$$v(x) = \sum_n z_n \psi_n(x)$$

Ces fonctions de déplacement sont appelées **fonction d'interpolation** car elles définissent la déformées par interpolation entre déplacement connus de nœuds.

En résumé, on peut dire que la méthode de discrétisation par éléments finis constitue la méthode la plus efficace pour exprimer les déplacements de configuration **arbitraire** de structure, au moyen d'un ensemble de coordonnées discrètes.

I.6. Formulation des équations du mouvement :

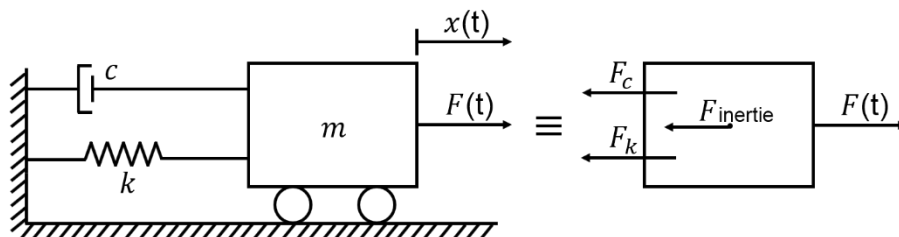
L'objectif initial de l'étude dynamique déterministe d'une structure est la détermination de l'histoire dans le temps des déplacements de la structure soumise à un chargement donnée est variable dans le temps. Il devient alors possible de déterminer les déformations et les contraintes en tous points de la structure.

Il existe trois approches possibles pour la formulation des équations du mouvement du système vibratoire :

I.6.1. Principe de d'Alembert (par équilibre directe) :

Les équations du mouvement d'un système dynamique quelconque sont des expressions de la **deuxième loi de Newton**.

La variation de la quantité de mouvement d'une masse quelconque est égale à la force qui lui est appliquée.



$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} ; a = \frac{dv}{dt} \text{ et } v = \frac{dx}{dt} \rightarrow a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$F(t) = m \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right) = m \frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x}(t) = \sum \text{Forces agissantes}$$

$F(t)$: vecteur force appliquée au système,

$x(t)$: vecteur position de la masse « m », F_c

La somme (Σ) des forces sont les forces élastiques $\vec{F}_k = k \vec{x}$, les forces d'amortissement $\vec{F}_c = c \dot{\vec{x}}$ ainsi que les forces extérieures $F(t)$.

Le principe d'Alembert : $m\ddot{x} = \vec{F}_i + \vec{F}_k + \vec{F}_c$ et conformément à la figure $m\ddot{x} + kx + c\dot{x} = F(t)$.

I.6.2. Principe des travaux virtuels :

Ce principe de déplacement virtuels peut s'exprimer comme suit :

Si un système que n'est pas en équilibre sous l'action d'un ensemble de force est soumis à un déplacement virtuel c'est un déplacement quelconque compatible avec liaison du système ou avec les conditions géométriques du système.

Pour appliquer ce système on doit :

- Identifier toutes les forces susceptibles d'agir sur les masses (y compris les forces d'inerties $\vec{F}_i$),
- Introduire des déplacement virtuel (δx) correspondant à chaque degré de liberté,
- Ecrire que le travail total effectué par les forces est nul : $-F_i\delta x - F_c\delta x - F_k\delta x + F(t)\delta x = 0 \rightarrow F(t) = F_i + F_c + F_k$.

I.6.3. Principe de Hamilton :

C'est le concept vibrationnel le plus général. Cette méthode permet d'éviter les problèmes de détermination des équations vectorielles mais consiste à utiliser les grandeurs énergétiques scolaires.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc}dt = 0$$

T : Energie cinétique totale du système,

V : Energie potentielle élastique du système, comprenant à la fois l'énergie de déformation et le potentiel de toutes les forces conservations extérieurs,

W_{he} : Travail effectué pour des forces non conservatrices agissant sur le système, c'est l'amortissement et toutes autres charges extérieures arbitraires,

δ : Variation subit pendant l'intervalle de temps considéré aux points extrêmes de l'intervalle.

Le principe de Hamilton peut s'appliquer aux problèmes statique $T = 0$ et l'expression devient : $\delta x(V - W_{nc}) = 0$ qui est un principe bien connu du minimum de l'énergie potentiel très largement utilisé la théorie statique.

Pour en revenir ainsi dans le cas précédent : $T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$, $V = \frac{1}{2} kx^2$

Les forces non conservatives F_c et $F(t)$ effectueront une variation de travail : $\delta W_{nc} = F(t)\delta x - c\dot{x}\delta x$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} m\dot{x}^2 \delta \dot{x} - \frac{1}{2} kx^2 \delta x \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} [F(t)\delta x - c\dot{x}\delta x] dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} m 2\dot{x}\delta\dot{x} - \frac{1}{2} k 2x\delta x + F(t)\delta x - c\dot{x}\delta x \right) dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} [m\dot{x}\delta\dot{x} - c\dot{x}\delta x - kx\delta x + F(t)\delta x] dt = 0$$

Et comme $\int_{t_1}^{t_2} m\dot{x}\delta\dot{x} dt = m\dot{x}\delta x \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{x}\delta x dt$

$$\delta\dot{x} = \frac{d(\delta x)}{dt}$$

$m\dot{x}\delta x \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$ annulation aux bornes d'intégration.

Pour $\delta x = 0$ $\left\{ \begin{matrix} t_1 = t \\ t_2 = t \end{matrix} \right. \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} [-m\ddot{x} - c\dot{x} - kx + F(t)]\delta x dt = 0$

Et δx est arbitraire et si l'expression entre crochet s'annule, l'équation générale est satisfaite $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$ devient du mouvement à un seul degré de liberté.

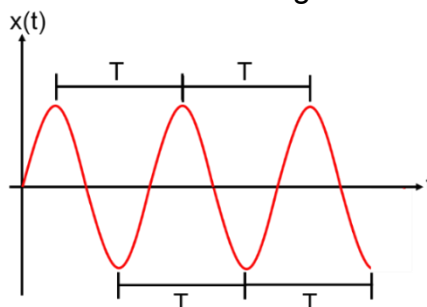
Tableau I.1.6. Différent principe pour la formulation des équations du mouvement du système vibratoire.

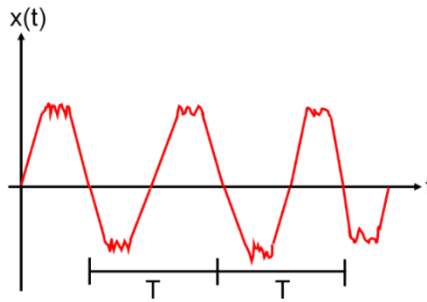
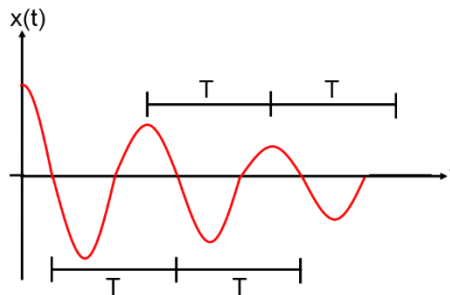
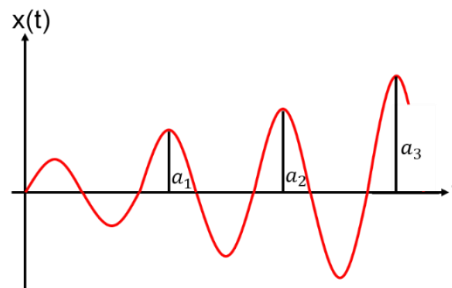
Principe	Expressions	Équations du mouvement
Principe de d'Alembert	$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$	$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$
Principe des travaux virtuels	$-F_i\delta x - F_k\delta x - F_c\delta x + F(t)\delta x = 0$	
Principe de Hamilton	$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{he} dt = 0$	

I.7. Classification des mouvements de vibration :

Les vibrations sont caractérisées par leurs **fréquences** et leurs **amplitudes**, elles peuvent être choisies la fonction de leurs variations d'amplitudes en fonction du temps.

a. **Vibration harmonique** : c'est un fonction trigonométrique simple.



b. Vibration périodique :**c. Vibration décroissante :** amplitude décroissante dans le temps.**d. Vibration croissante :** amplitude croissante dans le temps.**e. Vibration quelconque :** c'est une superposition de plusieurs mouvement sinusoïdaux simples.